MATEMATICA SUPERIOR APLICADA

Wilo Carpio Cáceres

2013

A mis amados hijos . . .

Sucesiones o Secuencias o Colecciones Numéricas

La FUNCION SUCESION

Tiene por dominio al conjunto N de números naturales o enteros positivos, relacionados al conjunto R de números reales, así, para cada valor del 1er conjunto le corresponde uno del 2do

La sucesión de la función $y = f_{(n)}$ para $a_n=f_{(n)}$, $n \in N$ (valores enteros positivos de **n**), tiene por **elementos** a los números del contra dominio $f_{(1)}$, $f_{(2)}$, $f_{(3)}$, ... $f_{(n)}$,...

Sus elementos están dispuestos uno a continuación de otro, tiene algún tipo de comportamiento de relación entre ellos.

Ejemplo: Sea la función $f_{(n)} = \text{Cos } n\pi$ para $n \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, . . . , n \}$

- **Elementos ordenados**:
  $f_{(1)} = \text{Cos } 1\pi$, $f_{(2)} = \text{Cos } 2\pi$, $f_{(3)} = \text{Cos } 3\pi$, $f_{(4)} = \text{Cos } 4\pi$,
- **Pares ordenados de f**:
  $(1, \text{Cos } 1\pi), (2, \text{Cos } 2\pi), (3, \text{Cos } 3\pi), (4, \text{Cos } 4\pi)$, ..

Cuando los números son parámetros de observaciónes, debe buscarse formas del **comportamiento** de su distribución.

Ejemplos:

- **-3, 0, 1/5, $2^{1/2}$, 7, 13**
  No se deduce el número siguiente a 13 porque no se encuentra la regla que indique de relación.
- **-1, 3, 7, 11, 15...**
  Como cada término es 4 mayor que el anterior, a 15 le seguirían 19, 23, 27...
- **3, 6, 12, 24, 48...**
  Como cada término es el doble del anterior, al quinto término 48, le seguiría 96.

Para **referirse a una sucesión** puedes:

- **Escribir** sus términos como:
  $a_1, a_2, a_3, a_4, .., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

Los subíndices determinan el lugar que cada término ocupa dentro de la sucesión.

- **Simbolizar** con (a_n), donde a_n es **término general** para referir el valor de un determinado término.

1/2, 3/2, 3/4, 4/5,... $a_n = \frac{n}{n+1}$

4, 4/2, 16/3, 25/4,... $b_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

1/2, 1, 9/8, 1, 25/32,... $c_n = \frac{n^2}{2^n}$

Para **representar a una sucesión**, puedes usar:

FÓRMULA ESQUEMÁTICA:

O **expresión formadora** para todo término, en función del número **n**, tal que $n \in N$ Ejemplo: $a_n = \frac{n}{n+3}$, $\rightarrow \{ a_n \}$

Genera los términos:

$\{a_n\} = \frac{1}{1+3}, \frac{2}{2+3}, \frac{3}{3+3}, \frac{4}{4+3}, ...$

$\{a_n\} = ¼, 2/5, 1/2, 4/7,...$

LEY DE RECURRENCIA

Donde el término **n+1** de la sucesión está en función del término anterior **n** Así: $a_1 = ½$, es anterior de: $a_{n+1} = \frac{1}{2.a_n}$

Genera los términos:

$a_1 = ½, \quad \frac{1}{2.a_1} = \frac{1}{2.\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{1}{2.a_2} = \frac{1}{2.1} = ½$

$\{ a_n \} = ½, 1, ½, 1,...$

A. SUCESIONES: LIMITES

En el estudio de sucesiones implica determinar si la sucesión:

- Tiene un límite
- Si tiene, **cual es su valor.** Para ello:

Una sucesión { a_n } tiene un límite $\text{Lim}_{x\to oo}\, a_n = L$, si para cualquier ε > 0 existe un número N > 0 tal que si n es un número entero y si n > N entonces | a_1- L| < ε

TEOREMA	Ejemplo
Si $\text{Lim}_{x\to oo}\, f_x = L$ se define para todo número entero positivo, entonces también se cumple que: **$\text{Lim}_{x\to oo}\, f_n = L$, cuando n se restringe a los números enteros positivos.**	El límite de: $f_{(n)} = \{ \frac{n}{2n+1} \}$, cuando $f_{(x)} = \frac{x}{2x+1}$, es: $Lím_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} = Lím_{x\to\infty} \frac{x/x}{2+\frac{1}{x}} = ½$ **$\text{Lim}_{n\to oo}\, f_{(n)} = ½$**

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = n
$a_n = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{n}{2n+1}$

Notamos que todos los valores tienden a ½, por lo tanto este es el límite

B. SUCESIONES: CONVERGENCIA

DEFINICION	Ejemplo
Si la sucesión { a_n } tiene un límite, se dice que es convergente; y a_n converge a tal límite y si la sucesión no es convergente se dice que es divergente.	El límite de la sucesión: $\{ \frac{4n^2}{2n^2+1} \}$, es: **$\text{Lim}_{x\to oo}$** f(x) = **$\text{Lim}_{x\to oo}$** $\frac{4x^2}{2x^2+1}$ = **$\text{Lim}_{x\to oo}$** $\frac{4}{2+\frac{1}{x^2}} = 2$ Como: **$\text{Lim}_{x\to oo}$** f(n) = 2, la sucesión converge a 2

PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES	
Si {a_n} y {b_n} son sucesiones convergentes y k una constante.	. $\text{Lim}_{n\to oo}\, k\, a_n = k\, \text{Lim}_{n\to oo}\, a_n$
Si la sucesión posee un límite, debe ser único.	. $\text{Lim}_{n\to oo}\, (a_n \pm b_n) = \text{Lim}_{n\to oo}\, a_n \pm \text{Lim}_{n\to oo}\, b_n$
La sucesión constante {k} posee por límite a k	. $a_n \,.\, b_n = (\text{Lim}_{n\to oo}\, a_n) \,.\, (\text{Lim}_{n\to oo}\, b_n)$
	. $\text{Lim}_{n\to oo}(a_n / b_n) = \text{Lim}_{n\to oo}\, a_n / \text{Lim}_{n\to oo} b_n$ Si $\text{Lim}_{n\to oo}\, b_n \neq 0$

C. SUCESIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Para todo valor de **n** una sucesión es

a) **CRECIENTE**: Cuando $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{a}_{n+1}$ Si: $\mathbf{a}_n < \mathbf{a}_{n+1}$: Estrictamente creciente

Ejemplo: En la sucesión $\{\frac{2n+3}{2}\}$ como $\mathbf{a}_n = \frac{2n+3}{2}$.

Reemplazando n por n + 1 obtenemos $\mathbf{a}_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{2} = \frac{2n+5}{2}$

Verificando $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{a}_{n+1}$ resulta $\frac{2n+3}{2} \leq \frac{2n+5}{2} \rightarrow 2n+3 \leq 2n+5$

Por lo tanto como se cumple la condición, la sucesión $\{\frac{2n+3}{2}\}$ es creciente.

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = n
$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{2n+3}{2}$

Graficando:

b) **DECRECIENTE**: Cuando $\mathbf{a}_n \geq \mathbf{a}_{n+1}$ Si: $\mathbf{a}_n > \mathbf{a}_{n+1}$: Estrictamente decreciente

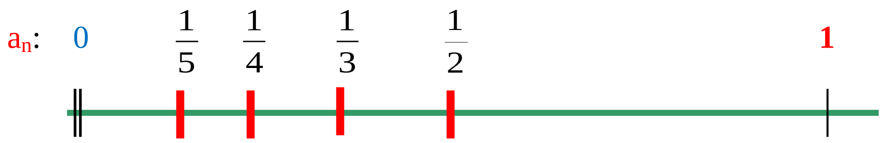
Ejemplo: En la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ que tiene por fórmula esquemática $\mathbf{a}_n = \frac{1}{n}$

Reemplazando **n** por **n + 1** obtenemos $\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Como: $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es decreciente.

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{n}$

Graficando:



D. SUCESIONES MONOTONAS

Cuando la sucesión es creciente o decreciente

Ejemplo: La sucesión $\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \}$ cuya fórmula esquemática es: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

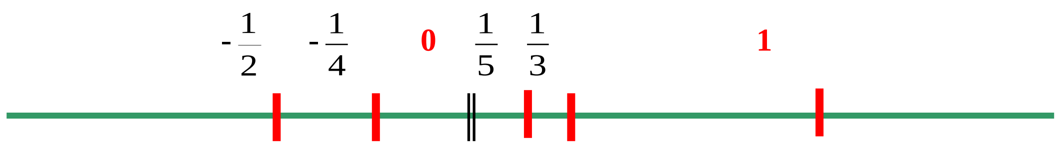
Reemplazando n por:

- n + 1 obtenemos $\mathbf{a_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$
- n + 2 obtenemos $\mathbf{a_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$
  - Si **n** es impar: $a_n > \mathbf{a_{n+1}}$ y $\mathbf{a_{n+1}} < \mathbf{a_{n+2}}$
  - Si **n** es par: $a_n < \mathbf{a_{n+1}}$ y $\mathbf{a_{n+1}} > \mathbf{a_{n+2}}$

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = n
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Graficando:

a_n:



Por tanto, la sucesión $\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \}$ **no es monótona** porque no es creciente ni decreciente

E. SUCESIONES ACOTADAS

En la sucesión $\{ a_n \}$ para todos los números enteros positivos n, el número C es una:

- **COTA INFERIOR de la sucesión $\{ a_n \}$ si $C \leq a_n$**
- **COTA SUPERIOR de la sucesión $\{ a_n \}$ si $a_n \leq C$**

Ej:	Para	La sucesión es	Cota inferior	Cota superior
1	$\mathbf{a_n = n}$	$\{ a_n \}$ = 1, 2, 3, 4, . . . , n, .	**1**	**no existe**
2	$\mathbf{a_n = - n -1= - (n +1)}$	$\{ a_n \}$ = -2, -3, -4, . . . , -(n + 1), . .	**no existe**	**-2**
3	$\mathbf{a_n = 2n}$	$\{ a_n \}$ = 2, 4, 6, ... , n, .	**2**	**no existe**
4	$\mathbf{a_n = - n -3= - (n +3)}$	$\{ a_n \}$ = -4, -5, -6, . . . , -(n + 3), . .	**no existe**	**-4**

a) **Si la cota inferior de la sucesión { a_n } es A y si este, cumple para la cota inferior C de { a_n }, C ≤ A, entonces A es la MÁXIMA COTA INFERIOR.**

Ejemplo: Dada la sucesión { $\frac{x}{2x+1}$ } = **1/3**, 2/5, 3/7,4/9 ... como cada cota inferior de ella es ≤ **1/3**, este es su **máxima cota inferior**.

x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5	x = n
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{n}{2n+1}$

Como: $\frac{x}{2x+1} \le \frac{x+1}{2x+3}$ → x(2x+3) ≤ (x+1)(2x+1) → $2x^2+3x \le 2x^2+3x+1$: Es **creciente y monótona**

b) **Si la cota superior de la sucesión { a_n } es A y si este, cumple para la cota superior C de { a_n }, A ≤ C, entonces A es la MINIMA COTA SUPERIOR.**

Ejemplo: En la sucesión { $\frac{x}{2x+1}$ } = 1/3, 2/5, 3/7,4/9 ...la cota superior es >= **1/2**, este es su mínima cota superior, por que se cumple $\frac{x}{2x+1} = \frac{\frac{x}{x}}{2+\frac{1}{x}} < ½$

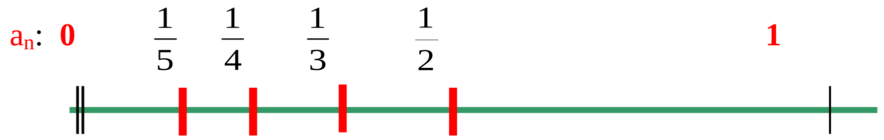
	x = 1	x =2	x = 3	x = 4	x = n
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{n}{2n+1}$

c) **Una sucesión es acotada si y solo si tiene una cota superior y una cota inferior.**

Ejemplo: En la sucesión { $\frac{1}{n}$ } = 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{n}$

Graficando:



En la sucesión { $\frac{1}{n}$ } = 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, .. \frac{1}{n}, ..$

Cota Superior:
1 y cualquier número que sea > que 1

Mínima Cota Superior:
1 cada cota superior de la sucesión es = 0 > 1

Cota Inferior: Cualquier número < 0
Máxima Cota Inferior: **0**

La sucesión { $\frac{1}{n}$ } es:

Acotada porque tiene cotas superior e inferior.

Decreciente porque: $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{n+1}$ → n+1 ≥ n

Por tanto es: **monótona acotada**

Convergente porque: $Lím_{x->\infty} \frac{1}{n} = 0$

Si la sucesión { a_n } tiene un límite, se dice que es convergente

F. SUCESIONES: PUNTO de ACUMULACION

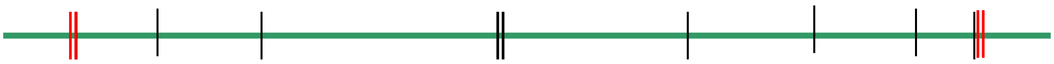
A es un punto de acumulación o aglomeración de la sucesión { a_n } ⇔ prefijado un número positivo ε, hay infinitos valores de n para quienes se cumple: | a_n - A | < ε

Ejemplo: Sucesión cuyas expresiones formadoras son: $a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1}$ y $a_{2n} = \frac{1}{2n}$

a_n →	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Corresponde	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}
Será n =	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
Se aplica	$1-\frac{1}{2n-1}$	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{2n-1}$	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{2n-1}$	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{2n-1}$
{ a_n }	**0**	**½**	**2/3**	**¼**	**4/5**	**1/6**	**6/7**

Graficando

a_n: **0** $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$ **1**



Notamos que todos los valores oscilan alrededor de **0** y **1**, por lo tanto la sucesión:

{ a_n } = { 0, ½, 2/3, ¼, 4/5, 1/6, 6/7,....} tiene dos puntos de acumulación, **0** y **1**

G. SUCESIONES DIVERGENTES

Una sucesión es divergente cuando:

a) Posee más de un punto de acumulación

Ejemplo: La sucesión donde: $a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1}$ y $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ del ejemplo anterior

{ a_n } = { 0, ½, 2/3, ¼, 4/5, 1/6, 6/7,....} tiene dos puntos de acumulación, 0 y 1, por tanto es divergente.

Para n =	1	2	3	4	5
{ a_n }	$1-\frac{1}{2n-1}$	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{2n-1}$	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{2n-1}$
{ a_n }	**0**	**½**	**2/3**	**¼**	**4/5**

b) No posee punto de acumulación

Ejemplo: La sucesión { **$a_n = (-1)^n\, 2\, n$** }, es divergente porque no tiene puntos de acumulación

Para n =	1	2	3	4	5
{ a_n }	$(-1)^n\, 2\, n$	$(-1)^n\, 2\, n$	$(-1)^n\, 2\, n$	$(-1)^n\, 2\, n$	$(-1)^n\, 2\, n$
{ a_n }	**- 2**	**4**	**- 6**	**8**	**- 10**

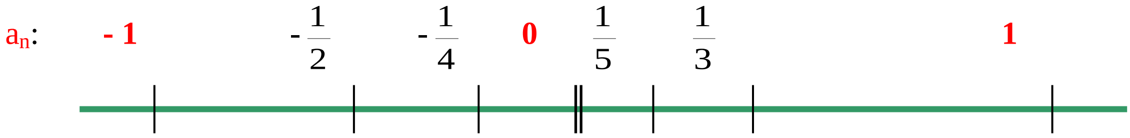
EJERCICIOS: SUCESIONES

1) Determinar el límite de las siguientes sucesiones:

1.a.- $f_n = \{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \}$ donde: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = n
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Graficando



Se destaca que todos los valores oscilan alrededor de 0, por lo tanto este es el límite

1.b.- El limite de $\left\{ \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}$, donde $f(x) = \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ es: **Lim$_{x->oo}$** $\left\{ \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \right\} = 1$

1.c.- El limite de $\left\{ \frac{3}{2+n} \right\}$ donde $f(x) = \frac{3}{2+x}$, es: **Lim$_{x->oo}$** $\frac{3}{2+x} = \frac{3}{\infty} = 0$

1.d.- El limite de $\left\{ \frac{2}{n}\left(n^3 - 1\right) \right\}$ donde: $f(n) = \left\{ \frac{2}{n}\left(n^3 - 1\right) \right\}$ ó $f(x) = \frac{2}{x}\left(x^3 - 1\right)$, es

Lim$_{x->oo}$ $\frac{2}{x}\left(x^3 - 1\right) = \lim_{x\to\infty} 2x^2 - \frac{2}{x} = \infty - 0 = \infty$

2) Determinar si las siguientes sucesiones convergen o divergen

2.a.- **Lim$_{x->oo}$** $\frac{4}{\frac{2}{n}+3}$ = **Lim$_{x->oo}$** $\frac{4}{\frac{2}{x}+3}$ = 4/3 Indica que la sucesión converge a 4/3

2.b.- **Lim$_{x->oo}$** f(x) = **Lim$_{x->oo}$** $\frac{x^2}{x^2+2x}$ = **Lim$_{x->oo}$** $\frac{1}{1+\frac{2}{x}}$ = 1 La sucesión converge a 1

2.c.- $f(n) = \left\{ \frac{n^3}{n-1} \right\}$ $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ **Lim$_{x->oo}$** $\frac{x^2}{1-\frac{1}{x}} = \infty$ La sucesión diverge.

2.d.- $f(n) = \left\{ \frac{n-2}{(n-5)^2} \right\}$; $f(x) = \frac{x-2}{(x-5)^2}$; **Lim$_{x->oo}$** $\frac{x-2}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}\right)} = 0$

La sucesión converge a cero.

2.e.- $f(n) = \left\{ 3n^2 - \frac{1}{2n^3} \right\}$; $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2x^3}$ **Lim$_{x->oo}$** $= 3x^2 - \frac{1}{2x^3} = \infty - 0 = \infty$, diverge.

3) Determinar si las siguientes sucesiones son crecientes o decrecientes.

3.a.- En la sucesión { $\frac{n}{2n+1}$ } que tiene por fórmula esquemática **a**$_n$ = $\frac{n}{2n+1}$,

Reemplazando **n** por **n + 1** → **a**$_{n+1}$ = $\frac{n+1}{2(n+1)+1}$ = $\frac{n+1}{2n+3}$

Verificando **a**$_n$ ≤ **a**$_{n+1}$ → $\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3}$.

Multiplicando ambos miembros por (2n + 1) (2n + 3), será $2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n + \mathbf{1}$.

Como se cumple la condición, la sucesión { $\frac{n}{2n+1}$ } es creciente.

$$a_n = f(n) = \left\{\frac{2n^2+3}{2}\right\} \leq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{\frac{2(n+1)^2+3}{2}\right\}$$

Si n=1 entonces 2.5 ≤ 5.5 Es una sucesión creciente.

3.b.- $a_n = f(n) = \left\{\frac{4n^3}{3n}\right\} \leq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{\frac{4(n+1)^3}{3(n+1)}\right\}$

Si n=1 entonces 4/3 ≤ 16/3 La sucesión es creciente.

3.c.- $a_n = f(n) = \left\{\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}\right\} \leq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{\frac{(-1)^{n+1+1}(-1)^{n+1}}{(n+1)}\right\}$

Si n=1 entonces –1 ≤ -1/2 La sucesión es creciente.

3.d.- $a_n = f(n) = \left\{3n + \frac{5}{n}\right\} \leq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{3(n+1)\frac{5}{(n+1)}\right\}$

Si n=1 entonces 8 ≤ 8.5 La sucesión es creciente.

3.e.-. $a_n = f(n) = \{(n+1)(n-1)\} \leq a_{n+1} = f(n+1) = \{(n+1+1)(n+1-1)\}$

Si n=1 entonces 0 ≤ 3 La sucesión es creciente.

3.f.- $a_n = f(n) = \left\{\frac{n^2+1}{3n}\right\} \leq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{\frac{(n+1)^2+1}{3(n+1)}\right\}$

Si n=1 entonces 2/3 ≤ 5/6 La sucesión es creciente.

3.g.- En la sucesión { $\frac{4}{3n}$ } como **a**$_n$ = $\frac{4}{3n}$

Reemplazando n por n + 1 obtenemos **a**$_{n+1}$ = $\frac{4}{3n+3}$

Como: $\frac{4}{3n} \geq \frac{4}{3n+3}$ la sucesión { $\frac{4}{3n}$ } es decreciente.

3.h.- $a_n = f(n) = \left\{\frac{n}{2n^2+1}\right\} \geq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{\frac{n+1}{2(n+1)^2+1}\right\}$

Si n=1 entonces 1/3 ≥ 2/9 La sucesión es decreciente.

3.i.- $a_n = f(n) = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \geq a_{n+1} = f(n+1) = \left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

Si n=1 entonces 1 ≥ ¼ La sucesión es decreciente.

4) Determinar las cotas de las siguientes sucesiones:

4.a.- $f(n)=\left\{\dfrac{n^3}{2n+1}\right\}=1/3;\ 8/5;\ 27/7;\ 64/9;\ 125/11...$ por tanto **Lim$_{x\to oo}$** $\dfrac{n^3}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=\infty$

- Cota superior: no existe
- Cota inferior: 1/3
- Esta sucesión no es acotada por que le falta la cota superior.

4.b.- $f(n)=\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}=1;\ 1/4;\ 1/9;\ 1/16;\ 1/25...$ de donde: **Lim$_{x\to oo}$** $\dfrac{1}{x^2}=0$

- Cota Superior: 1
- Cota Inferior : 0
- Mínima cota superior: 1
- Máximas cota inferior: 0

4.c.- $a_{2n-1}=1-\dfrac{1}{2n^2-1}$ y $a_{2n}=\dfrac{n^2}{2n}$

a_n	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}
n=	1	1	2	2	3	3	4
$a_n=$	0	½	6/7	1	16/17	3/2	30/31

$a_n=0;\ 1/2;\ 6/7;\ 1;\ 16/17;\ 3/2;\ 30/31...$ luego: **Lim$_{x\to oo}$** $(1-\dfrac{1}{2x^2-1})=1-0=1$

- Cota superior: 1
- Cota inferior: 0

4.d.- $a_n=\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}=0;\ 1/3;\ 2/4;\ 3/5;\ 4/6;\ 5/7;\ ...$

- Cota superior:1
- Cota inferior: 0

4.e.- $a_n=\{4-n^2\}=3;\ 0;\ -5;\ -12;\ -21...$

- Cota inferior: No tiene
- Cota superior: 3 Como esta sucesión no tiene cota inferior, no es acotada.

4.f.- $a_n=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=1/3;1/9;1/27;1/81;1/243...$

- Cota superior: 1/3
- Cota inferior: 0

5) Determinar si las siguientes sucesiones tienen puntos de acumulación.

5.a.- { **a**$_{2n-1}$ $= 1-\dfrac{1}{2n-1}$ } y $a_{2n} = \dfrac{n^2}{2n}$

a_n	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}
n=	1	1	2	2	3	3	4
$a_n =$	0	½	2/3	1	4/5	3/2	6/7

- La sucesión a_n =0;1/2;2/3;1;4/5;3/2;6/7... Tiene un punto de acumulación : 1

5.b.- $f(n) = \left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} \right\}$ =-1;-1/2;-1/3;-1/4;-1/5... Tiene un punto de acumulación: 0 (cero)

5.c.- $f(n) = \{a_n : a_n = (-1)^{2n} 2n^n\} = 2$; 8; 54; 512; 6250... No tiene punto de acumulación.

5.d.- $f(n) = \{2n^2 - 1\} = 1$; 7; 17; 31; 49... No tiene punto de acumulación.

5.e.- $f(n) = \{3^{n-1}\} = 1$; 3; 9; 27; 81... No tiene punto de acumulación.

5.f.- $f(n) = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n+1} \right\} = 1/2$; 2/3; 3/4; 4/5; 5/6... Tiene un punto de acumulación: 1

APLICACIÓN: SUCESIÓN DE FIBONACCI

La **sucesión de Fibonacci** descrita por el matemático italiano del siglo XIII Leonardo de Pisa (Fibonacci), es la sucesión infinita f_o, f_1, f_2, f_n de números naturales: **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13..,** donde el primer elemento es **0**, el segundo es **1** y luego, cada elemento restante es la **suma de los dos anteriores**.

Cada elemento de esta sucesión es un **número de Fibonacci**, donde:

$$f_o = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad \text{para: } n = 2, 3, 4, ..$$

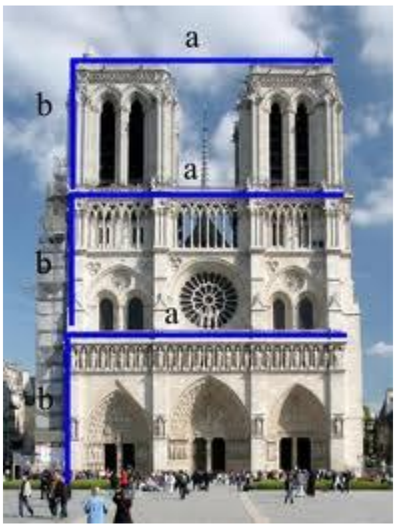
Propiedades de la sucesión de Fibonacci:

- Los números consecutivos de Fibonacci son primos entre si
- La suma de los n primeros términos es: $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+2} - 1$
- La suma de los términos impares es: $a_1 + a3 + ... + a_{2n-1} = a_{2n}$
- La suma de los términos pares es: $a_1 + a_4 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$
- La suma de los cuadrados de los **n** primeros términos es: $a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2} = a_n \, a_{n+1}$
- Si **n** es divisible por **m** entonces a_n es divisible por a_m

Un número N pertenece a la sucesión Fibonacci si y sólo si, cumple que: $5N^2$ o también $5N^2 - 4$
Ejemplo: N=610 → 5· (610)2 - 4 = 5· 372100 – 4 = 1860500 – 4 = 1860496 la raíz de 1860496 es 1364, luego 610 pertenece a una sucesión de Fibonacci.
La propiedad más curiosa de esta sucesión es que el cociente de dos números consecutivos de la serie se aproxima a la **razón áurea** o **proporción divina** que es: $\varphi = \tau = a_{n+1} / a_n$, cuyo valor es un **número irracional**(decimal infinito no periódico) que tiende a: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} = 1.61803398...$, que posee propiedades descubiertas en la antigüedad, no como “unidad” sino como relación o proporción entre segmentos de rectas que se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como cohetes, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, el caparazón de un caracol, etc.

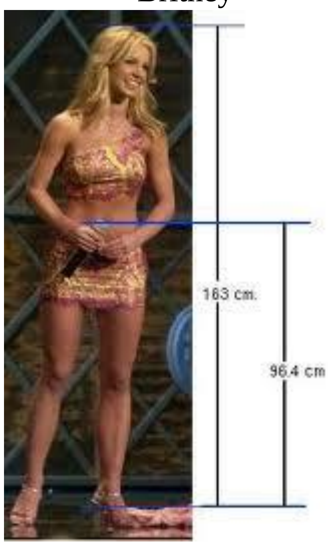
Históricamente se atribuye un carácter estético místico a objetos que siguen la razón áurea. Así, se asignó importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes.

Notre Dam



Partenon

Britney



FIBONACCI: En la cria de conejos:

Una colonia de conejos comienza con un par de conejos “un macho y una hembra” infértiles “acabados de nacer”. Supongamos lo siguiente:

- Una pareja de conejos alcanza su fertilidad un mes luego de su nacimiento.
- Luego que la pareja alcanza su fertilidad se tarda un mes en procrear una pareja de conejos “un macho y una hembra”.

Si ninguno muere, ¿Cuántas parejas de conejos habrá luego de un año?

En la siguiente tabla se muestran los 12 meses del año, el número de parejas que se reproducen, parejas fértiles, parejas infértiles y el total de parejas en la colonia por mes.

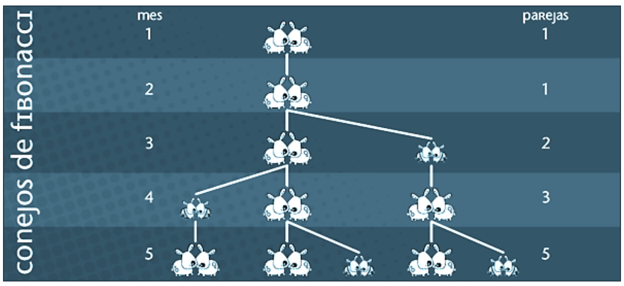
	MES											
Parejas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Que se reproducen	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**
Fértiles	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**
Infertiles	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	55
Total	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**

“Recuerde que al nacer una pareja es infértil, luego de un mes se convierte en fértil, por último las parejas fértiles al pasar un mes se reproducen”

- Inicialmente la pareja es infértil, el segundo mes se convierte en fértil y el tercer mes procrea una pareja infértil. Esto implica que en el tercer mes hay 2 parejas de conejos una que se puede reproducir en el próximo mes y una infértil.
- En el cuarto mes la pareja que se puede reproducir lo hace “naciendo una pareja de conejos infértiles”, mientras que la pareja que nació en el tercer mes se convierte en fértil, para un total de 3 parejas en el cuarto mes.
- En el quinto mes la pareja fértil se puede reproducir esto implica que hay dos parejas que se pueden reproducir y así lo hacen “naciendo dos parejas de conejos infértiles”, mientras que la pareja que nació se convierte en fértil para un total de 5 parejas en el quinto mes. Si continuamos con el proceso llegamos a la solución del problema, el número de parejas de conejos en la colonia luego de un año es **144**.

FIBONACCI: En la cria de hamster:

Problema: tenemos una pareja de hámster, si a cada parto obtenemos una nueva pareja, tarda un mes en madurar sexualmente y el embarazo dura un mes ¿cuantas tendremos en 6 meses?

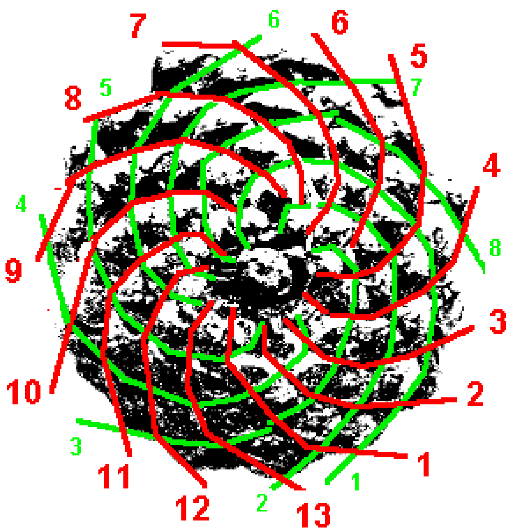


FIBONACCI: En la cria de abejas:

Las celdas hexagonales de una colmena donde se coloca a una abeja en cualquiera de ellas, y se le permite alimentar a la larva, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, veremos que:

- hay sólo una ruta posible para la siguiente celdilla;
- dos hacia la segunda,
- tres hasta la tercera,
- cinco hasta la cuarta,
- ocho rutas posibles hacia la quinta, etcétera.

FIBONACCI: En las espirales del anana:



Otra aplicación está en una piña:

En ella se cuenta las hileras espirales de escamas, se puede descubrir:

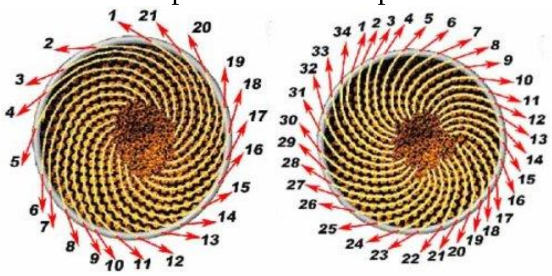
- 8 espirales enrollándose hacia la izquierda y
- 13 espirales que se enrollan hacia la derecha,
- O bien 13 hacia la izquierda y
- 21 hacia la derecha, u otras parejas de números.

Lo más impactante es que estas parejas de números serán adyacentes en la famosa sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

FIBONACCI: En las espirales de los girasoles:

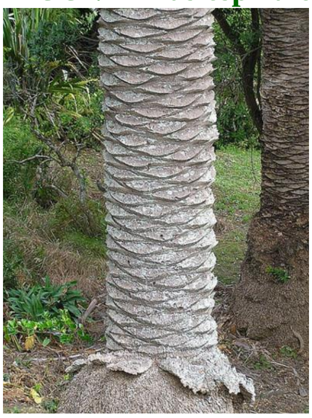
La disposición de las semillas en los girasoles.

Las semillas, ubicadas en la gran parte central de las flores. Éstas tienen una implantación en espiral:



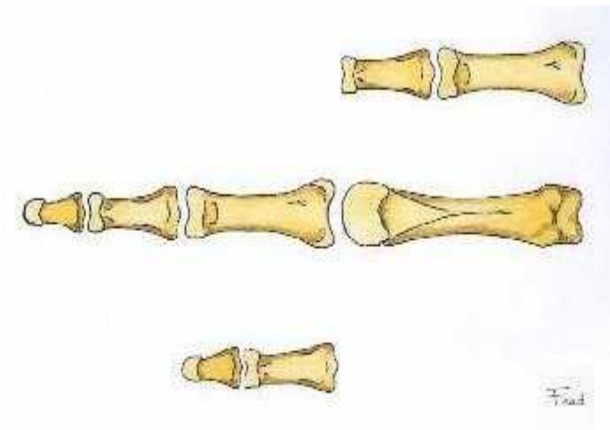
- Tiene dos grupos de espirales, gobernadas por dos funciones logarítmicas.
- Un grupo gira en sentido horario y otro en el antihorario.
- La cantidad de espirales logarítmicas en cada grupo sigue números de Fibonacci consecutivos.

FIBONACCI: En las espirales de la palmera:

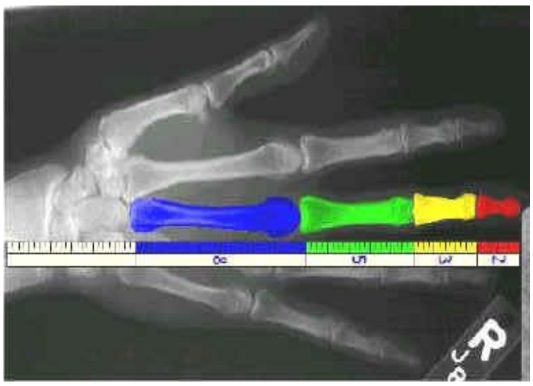


En la palmera y en todas las plantas que tienen estas espirales, el número de espiras es siempre uno de estos números: 1 2 3 5 8 13 21 34 ... donde cada número es la suma de las dos anteriores: 1 +2 = 3, 2 +3 = 5, 3 +5 = 8 etc

FIBONACCI: En la mano humana:

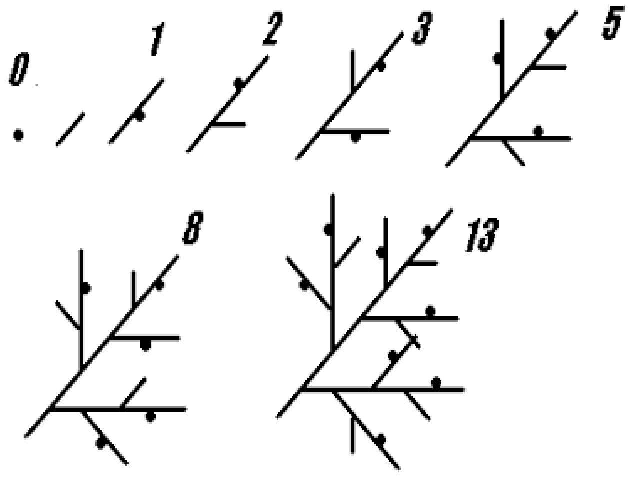


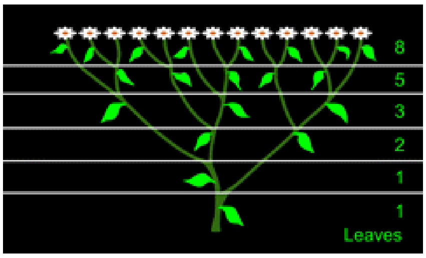
La longitud del metacarpo es la suma de las dos falanges proximales;
la longitud de la primera falange es la suma de las dos falanges distales



FIBONACCI: En la rama del árbol:

En una rama de un árbol, la yema al cabo de un periodo de tiempo t se habrá convertido en rama. Pasado un tiempo t la rama habrá crecido y formado otra yema en el lateral.



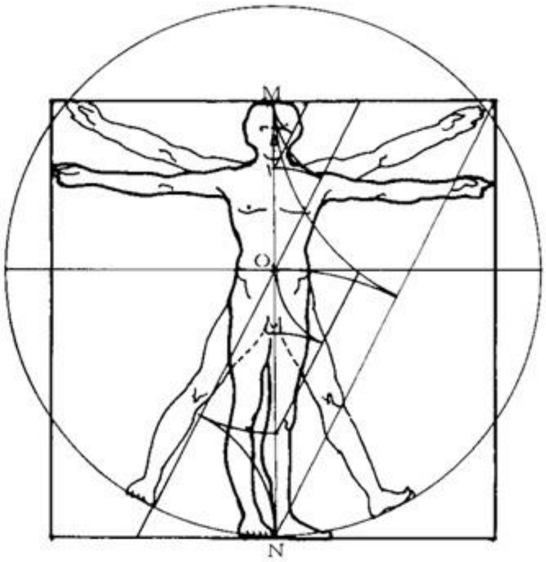


Pasado un nuevo periodo de tiempo t la rama habrá seguido creciendo y habrá formado otra yema.
Pero la yema que había formado en el ciclo anterior se habrá convertido en rama,
Y el ciclo se repetirá haciendo algo como este dibujo.
El número de ramas sigue una sucesión de Fibonacci.
Veremos que también el número de yemas sigue una sucesión de Fibonacci atrasada un ciclo y por tanto el numero de ramas más el número de yemas también forma esa sucesión

Observa también las hojas de esta planta

FIBONACCI: En la figura humana:

Mide desde tu hombro hasta la punta de los dedos de la mano extendida. El resultado divídelo por la medida desde el codo hasta la punta extendida de los dedos. (¿Cuánto te sale?). Prueba a hacer lo mismo con las medidas desde la cadera al suelo entre la medida desde la rodilla al suelo.

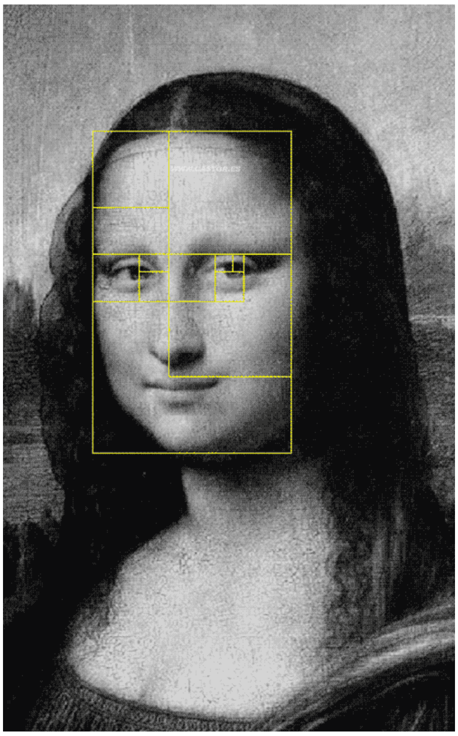


También puedes probar a dividir tu altura total por la medida resultante desde tu ombligo al suelo. Todos estos estudios de Leonardo son fruto de concienzudas medidas y estudios sobre cadáveres que desenterraban.

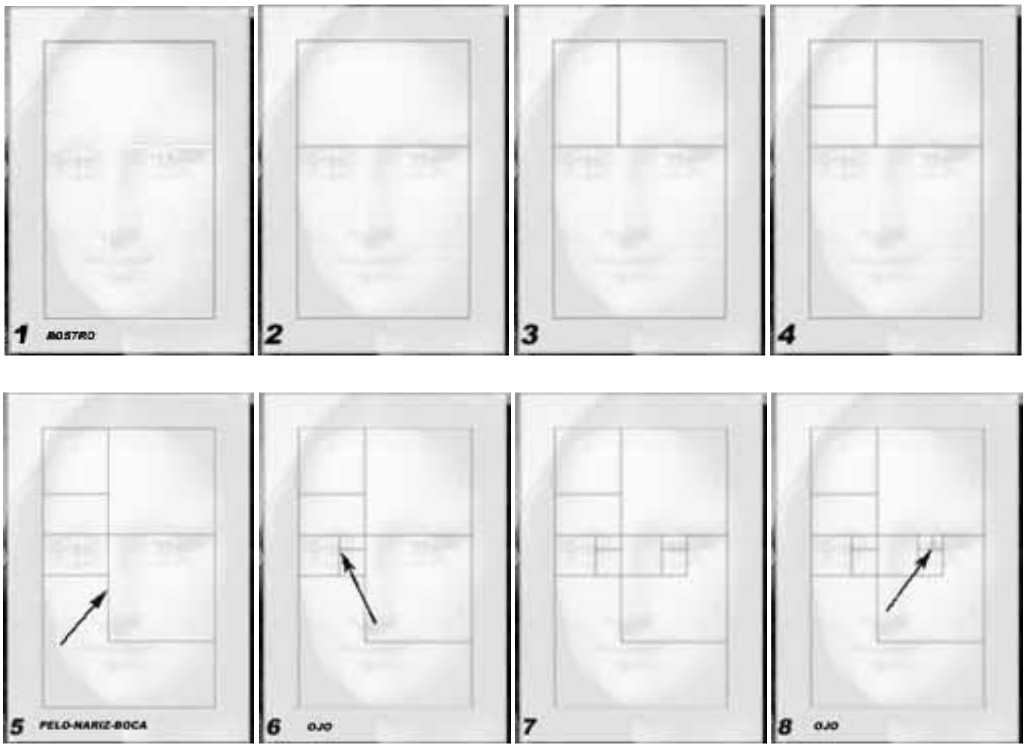
Considerando la figura humana inscrita en el cuadrado, el ombligo corresponde al es centro del círculo circunscrito al "homo rotundus".

Subdividiendo OM y ON en sección áurea, y haciendo luego lo mismo con los segmentos resultantes, se obtienen los puntos correspondientes a las rodillas, ingle, hombros y ojos.

FIBONACCI: Mona Lisa:



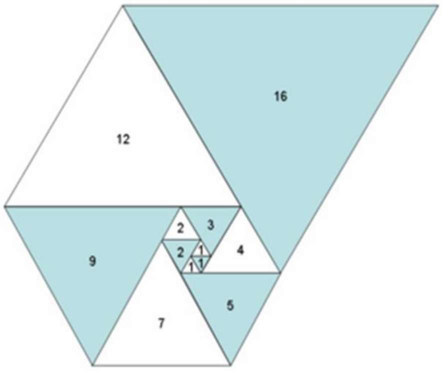
La Gioconda transmite tanta armonía porque su cara esta perfectamente encuadrada en un rectángulo áureo, al igual que el resto de proporciones de la misma..
1- El rostro de la Gioconda se encuadra en un rectángulo áureo.
2- Dentro de ese rectángulo áureo dibujo un cuadrado, quedando arriba otro rectángulo áureo.
3- realizo la misma operación realiza anteriormente en el rectángulo áureo obtenido en el esquema Nº 2.
4- Vuelvo a realizar la misma operación en el esquema.
5- Aquí traslado simétricamente según la línea que pasa justo encima de los ojos el cuadrado grande de arriba y el último rectángulo áureo obtenido. Podemos observar que la línea que apunto sale exactamente del nacimiento del pelo (justo en la raya del pelo) pasa por la mitad de la nariz y termina en la mitad de donde empieza la boca de Mona Lisa.
6- Aquí realizamos la misma operación descrita en el Nº 2 dos veces. El punto que señalo es exactamente el centro de la pupila del ojo izquierdo de la Gioconda y en el Nº el ojo derecho.
7- Traslado simétricamente según la línea que va del pelo a la boca lo dibujado en el Nº 6.
Trazo un nuevo rectángulo áureo en el cual la esquina inferior izquierda del último cuadrado dibujado es exactamente el centro de la pupila del ojo derecho de la Gioconda.



APLICACIÓN: SUCESIONES PADOVAN

Se parte de un diagrama muy similar al de la figura, pero compuesto de triángulos equiláteros.

Los triángulos siguen una espiral en el sentido de las agujas de un reloj y de nuevo se trata de una espiral aproximadamente logarítmica.



Los tres primeros triángulos tienen lado 1. Los dos siguientes tienen lado 2, y luego los números van como 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21 y así sucesivamente.

De nuevo hay una regla de formación sencilla: cada número de la secuencia es la suma de los que le preceden dos y tres lugares antes. Por ejemplo, 12 = 7 + 5, 16 = 9 + 7.

Esta sucesión se llama sucesión de Padovan en honor a Richard Padovan. De forma similar a lo que ocurre en la sucesión de Fibonacci, ahora las razones de dos números consecutivos de la sucesión de Padovan tienden hacia el número de plástico. Ejemplo: 200/151 = 1.3245.

Ejemplo: A la par, se incluyen los veinte primeros términos de la sucesión de Padovan y la regla algebraica de generación:

P(n + 1) = P(n ¡ 1) + P(n ¡ 2) donde P(0) = P(1) = P(2) = 1:

n	***P*(*n*)**
0	1
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	5
8	7
9	9
10	12
11	16
12	21
13	28
14	37
15	49
16	65
17	86
18	114
19	151
20	200

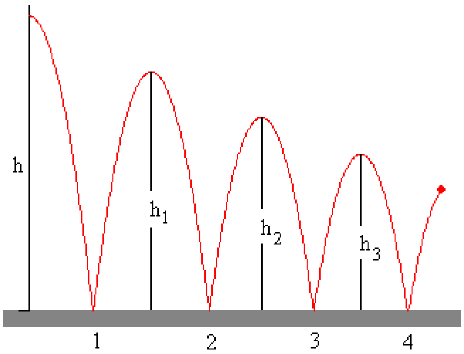
Notar que los números 3, 5 y 21 forman parte de la sucesión de Fibonacci y de la de Padovan.

Benjamín de Weger demostró que estos son los únicos números que son a la vez de Fibonacci y de Padovan, junto con los triviales 0,1 y 2.

Algunos números de Padovan como 9, 16 y 49 son cuadrados perfectos y sus raíces 3, 4 y 7 también son de Padovan.

Algunos edicios arquitectónicos siguen en su construcción la sucesión de Padovan.

APLICACIÓN: CHOQUE ELÁSTICO



El choque elástico ocurre en una colisión entre dos o más cuerpos en la que éstos no sufren deformaciones permanentes durante el impacto.
En una colisión elástica se conservan tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema y no hay intercambio de masa entre los cuerpos, que se separan después del choque.
Supongamos que una pelota se deja caer desde una altura inicial h.

Datos:

- **m:** masa de la pelota
- **v:** velocidad de la pelota después de tocar el suelo
- **u:** velocidad de la pelota antes de tocar el suelo
- **h:** altura alcanzada por la pelota
- **e:** coeficiente de restitución elástico
- **g:** aceleración de la gravedad
- **n:** número de rebote

1.-Primer rebote: La velocidad de la pelota antes del choque con el suelo se calcula aplicando el principio de conservación de la energía

$$mgh = \frac{1}{2}mu_1^2 \qquad u_1 = \sqrt{2gh}$$

La velocidad de la pelota después del choque es (en módulo) $v_1=e\cdot u_1$
La pelota asciende con una velocidad inicial v_1, y alcanza una altura máxima h_1 que se calcula aplicando el principio de conservación de la energía.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \qquad h_1 = e^2 h$$

2.-Segundo rebote: La velocidad de la pelota antes del choque con el suelo se calcula aplicando el principio de conservación de la energía

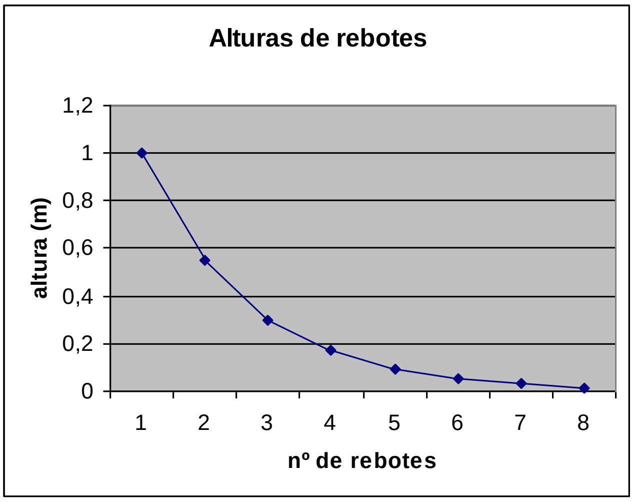
$$\frac{1}{2}mu_2^2 = mgh_1 \qquad u_2 = \sqrt{2gh_1}$$

La velocidad de la pelota después del choque es $v_2=e\cdot u_2$
La pelota asciende con una velocidad inicial v_2, y alcanza una altura máxima h_2 que se calcula aplicando el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2 \qquad h_2 = e^2 h_1 = e^4 h$$

3.-Rebote *n*: Después del choque *n*, la altura máxima que alcanza la pelota es → $h_n=e^{2n}\cdot h$

APLICACIÓN REAL: Si dejamos caer verticalmente pelotas de tenis, en el rebote deben recuperar entre el 53 y el 58% de la altura a la que se soltó.
Dejamos caer la pelota desde una altura de 1m (100 cm) y suponemos que recupera un 55% de la altura en cada rebote.
Así: h_1=1m, h_2=0.55m, h_3=0.30m, h_4=0.16m… hasta $h_{n+1}=h_n*E$; suponiendo E como el porcentaje de altura que recupera.
Las alturas alcanzadas en cada rebote las podemos interpretar como una sucesión en la que a_1=1m (altura inicial) y a los siguientes términos como $a_{n+1}=\{a_n * E\}$
Por lo tanto obtendremos como resultado: E = 55% = 0.55



a_1= 1m
$a_2=\{a_1 * E\} = \{1m * 0.55\} = 0.550m$
$a_3=\{a_2 * E\} = \{0.550m * 0.55\} = 0.303m$
$a_4=\{a_3 * E\} = \{0.303m * 0.55\} = 0.166m$
$a_5=\{a_4 * E\} = \{0.166m * 0.55\} = 0.092m$
$a_6=\{a_5 * E\} = \{0.092m * 0.55\} = 0.050m$
$a_7=\{a_6 * E\} = \{0.050m * 0.55\} = 0.028m$

Para n=	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	0,550	0,303	0,166	0,092	0,050	0,028

Para esta sucesión $a_n \geq a_{n+1}$ y $a_{n+1} \geq a_{n+2}$, de lo que se concluye que es una **sucesión decreciente**.

$\mathbf{a_1}$= 1m ≥ a_2= 0.550m y $\mathbf{a_2}$= 0.550m ≥ a_3= 0.303m

$\mathbf{a_3}$= 0.303m ≥ a_4= 0.166m y $\mathbf{a_4}$= 0.166m ≥ a_5= 0.092m

Como la altura alcanzada en los sucesivos rebotes depende directamente la altura máxima alcanzada anteriormente, en este caso se aplica la ley de recurrencia para explicar este experimento.

En este caso en particular que $1 \geq a_n \geq 0$, como consecuencia a esto podemos decir que tiene:

- cota superior = **1**
- cota inferior = 0

a_1= 1m (altura inicial)
$a_2=\{a_1 * E\}$
$a_3=\{a_2 * E\}$
$a_4=\{a_3 * E\}$
$a_5=\{a_4 * E\}$
$a_6=\{a_5 * E\}$
$a_{n+1}=\{a_n * E\}$
a_1= **1**m
a_2= 0.550m
a_3= 0.303m
a_4= 0.166m
a_5= 0.092m
a_6= 0.050m
a_7= 0.028m

Esta sucesión presenta un **punto de acumulación** en A = 0 que es cuando el número de rebotes de la pelota aumenta, la altura alcanzada por la pelota es cada vez mas pequeña.

$\{a_n\}$ = {1; 0.550; 0.303; 0.166; 0.092; 0.050; 0.028…n}

APLICACION: SUCESIONES DE MARTINGALA

La martingala era un tipo de estrategia de apuesta popular en Francia en el siglo XVIII. La más simple de estas estrategias fue diseñada para un juego en el que el apostante gana la apuesta en caso de que al lanzar una moneda caiga de cara y pierde en caso de que salga cruz.
El concepto de la martingala en la teoría de probabilidades fue introducida por Paul Pierre Lévy, y una gran parte del desarrollo original de la teoría lo realizó Joseph Leo Doob. Parte de la motivación para ese esfuerzo era demostrar la inexistencia de estrategias de juego infalibles.

Definamos una ronda como una secuencia de pérdidas consecutivas seguida de una ganancia o de la bancarrota del jugador. Después de cada ganancia, el jugador reinicia al valor inicial la cantidad apostada, y vuelve a jugar otra ronda. Una serie de apuestas siguiendo el método martingala es equivalente a una secuencia de rondas independientes. Para esto, si:

- **D**: Cantidad limitada de dinero para apostar del apostante.
- **N**: Cantidad de apuestas que el apostante puede realizar y esta directamente relacionada con la cantidad de dinero que este posea
- **A**: Monto de la apuesta inicial del apostante.

Cuando el apostante realiza su apuesta inicial pueden ocurrir que:

- Gane
- Pierda su apuesta, y en este caso para su siguiente juego el apostante
  - Doblara la misma, en caso de ganar comienza de nuevo con su apuesta inicial, en caso de perder, la tercer apuesta será el doble de la segunda, la cuarta sera el doble de la tercera y asi sucesivamente hasta ganar y comenzar de nuevo con la apuesta inicial o hasta llegar al límite maximo de apuestas impuesto por la banca (si este existiera) o hasta quedarse sin dinero.

$$\mathbf{D = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_n}$$
$$\mathbf{N_1 = A}$$
$$\mathbf{N_2 = 2N_1 = 2A}$$
$$\mathbf{N_3 = 2N_2 = 2A_2 = 4A}$$
$$\mathbf{N_4 = 2N_3 = 2A_3 = 8A}$$
$$N_n = 2A_{n-1}$$

Si el apostante tiene 63 dólares disponibles para apostar. En el primer juego, apuesta 1 dólar. Si pierde, apuesta 2 dólares la segunda vez, 4 la tercera, 8 la cuarta, 16 la quinta, y 32 la sexta (no hay una séptima vez porque el apostante no tiene tanto dinero).
Si gana 1 dólar en el primer juego, se lleva 1 dólar, y el juego empieza de nuevo. Si pierde la primera apuesta (1 dólar) y gana la segunda (2 dólares), el beneficio es también de 1 dólar.
Si pierde las seis apuestas, el apostante perderá sus 63 dólares, y no podrá seguir jugando.

$$\mathbf{D = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6}$$
$$\mathbf{N_1 = A \;;\; N_2 = 2A \;;\; N_3 = 4A \;;\; N_4 = 8A \;;\; N_5 = 16A \;;\; N_6 = 32A}$$
$$\mathbf{D = A + 2A + 4A + 8A + 16A + 32A}$$
$$\mathbf{\$63 = 63A}$$
$$\mathbf{\$1 = A}$$

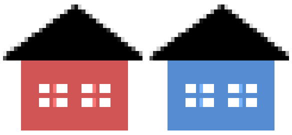
nº de apuestas	Dinero Apostado	Resultado	
		Gana	Pierde
1	\$1	N1=\$1	N1=\$1
2	\$2	N2-N1=\$1	N2+N1=\$3
3	\$4	N3-N2-N1=\$1	N3+N2+N1=\$7
4	\$8	N4-N3-N2-N1=\$1	N4+N3+N2+N1=\$15
5	\$16	N5-N4-N3-N2-N1=\$1	N5+N4+N3+N2+N1=\$31
6	\$32	N6-N5-N4-N3-N2-N1=\$1	N6+N5+N4+N3+N2+N1=\$63

APLICACIÓN: SUCESIÓN EN EDIFICIOS

Debes decidir como pintar el exterior de varios edificios, de modo que, cada uno de ellos presente los colores rojo y azul, pero pintados en forma diferente.
Cuantas combinaciones de colores pueden lograrse?

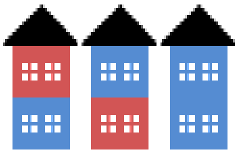
► **Con edificios con una planta:**

Pero como no hay una sola planta, y sólo tenemos dos colores de pintura, hay dos edificios, buscando diferentes combinaciones (2 combinaciones)



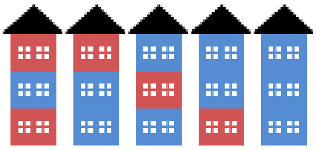
► **Combinaciones para los edificios de dos plantas:**

Antes de decir "¿Qué tal un edificio de dos plantas de color rojo?" .Si usted ha estado preguntando lo que todo esto tiene que ver con la serie de Fibonacci, esta en lo correcto, empezara a buscar patrones a medida que continuamos. (3 Combinaciones)



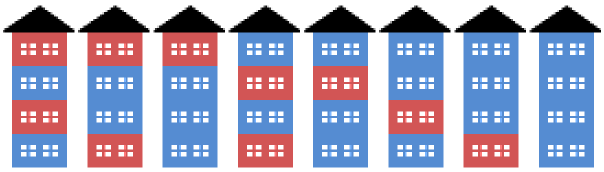
► **Departamentos con tres pisos:**

Observara que si hay un edificio tiene tres pisos, hay cinco maneras de pintarlo. Al ver un patrón? 2, 3, 5. ¿Los números que recuerdan algo? (5 combinaciones)

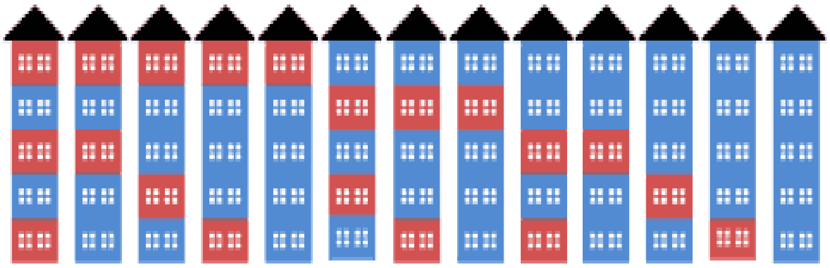


► **Departamentos con cuatro pisos**:

¡OH sí! Después de 1 y 1, estos son los próximos cuatro valores de la Serie de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc). (8 combinaciones)



► **Departamentos con cinco pisos**:



(Trece (13) combinaciones)
Así que el patrón continúa con 13, el número 7 º, que es el número 21 en la Serie de Fibonacci.

APLICACIÓN: DOMINO

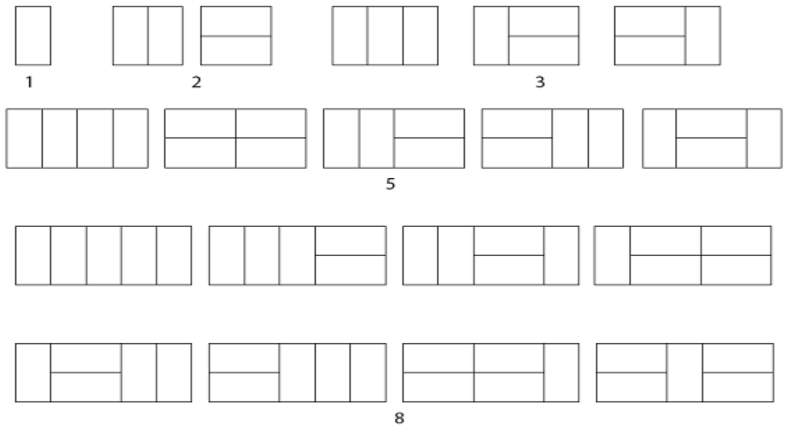
Construir rectángulos con piezas de dominó. Como un cuadrado es un tipo de rectángulo y que una pieza de dominó mide el doble de largo que de ancho.

¿Cuántos rectángulos diferentes pueden construirse con piezas de dominó de:

- 2x1piezas → 1 rectángulo
- 2x2 piezas → 2 rectángulos
- 2x3 piezas → 3 rectángulos
- 2x4 piezas → 5 rectángulos
- 2x5 piezas → 8 rectángulos

Se logra la sucesión

1, 2, 3, 5, 8, ...



APLICACIÓN: SUCESIÓN DE FAREY

Estas sucesiones reciben el nombre del geólogo británico John Farey, quién publicó una carta en la revista Philosophical Magazine en 1816, donde conjeturó que cada término de la sucesión es el cociente de la suma de los numeradores y la suma de los denominadores de sus términos vecinos.

Cada sucesión de Farey comienza en el **0**, denotado por la fracción **0/1**, y termina en el **1**, denotado por la fracción **1/1**, aunque algunos autores suelen omitir ambos términos. Así, para un número **n = 4**, la manera algorítmica de construir la sucesión de Farey es usar unas fracciones con todas las combinaciones posibles de los números del **1** al **4**:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}; \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}; \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}$$

- Elimina fracciones > 1 (numerador>denominador): $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}; \frac{3}{3}, \frac{3}{4}; \frac{4}{4};$
- Simplifica las fracciones, descarta las repetidas: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4};$
- Ordena de menor a mayor, agrega el 0 ($\frac{0}{1}$) al principio: $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$

EJEMPLO:

La sucesión de Farey para *n* entre 1 y 8 es la siguiente:

$F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$

$F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$

$F3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$

$F4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$

$F5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$

$F6 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\}$

$F7 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\}$

$F8 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}\}$

$F9 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1}\}$

Longitud de la Suceción de Farey de orden *n*: Contiene todos los miembros de las sucesiones de Farey de un orden menor. En particular F_n contiene todos los miembros de F_{n-1} así como una fracción adicional de cada número que es menor que n y coprimo con n. Por ejemplo, F_6 contiene a F_5 junto con las fracciones $1/6$ y $5/6$. El término medio de una sucesión de Farey es siempre $1/2$ para todo n>1.

Se extrae la relación entre F_n y F_{n-1} usando la función $\varphi(n)$ de Euler: $|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n)$

Y como $|F_1| = 2$, derivamos la longitud de F_n como: $|F_n| = 1 + \sum_{m=1}^{n} \varphi(m)$

Por otra parte, el comportamiento asintótico de $|F_n|$ es: $|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2}$

Vecinos de Farey: Las fracciones que antedecen y siguen a cada término de la sucesión (*vecinos de Farey*) tienen las siguientes propiedades:

Si a/b y c/d son *vecinos* en la sucesión de Farey con $a/b < c/d$, luego su diferencia $c/d - a/b$ es: $1/bd$.

Y puesto que $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{(bc - ad)}{bd}$, esto es equivalente a afirmar que: bc – ad = 1

Por ejemplo, $1/3$ y $2/5$ son vecinos de F_5, y su diferencia es $1/15$.

La afirmación inversa también es cierta. Si: bc – ad = 1

para los enteros positivos a,b,c,d con $a < b$ y $c < d$ entonces a/b y c/d serán vecinos en una sucesión de Farey de orden min(b, d).

Si p/q tiene como vecinos a a/b y c/d en alguna sucesión de Farey, con: $a/b < p/q < c/d$, luego p/q es el cociente de la suma de los denominadores y los numeradores de a/b y c/d :

$$\frac{p}{q} = \frac{(a+c)}{(b+d)}.$$

Y, si a/b y c/d son vecinos en una sucesión de Farey, entonces el primer término que aparece entre ellos cuando el orden de la sucesión de Farey se incrementa es

$$\frac{(a+c)}{(b+d)},$$

que aparece primero en la sucesión de Farey de orden $b+d$.

Por ejemplo, el primer término que aparece entre $1/3$ y $2/5$ es $3/8$, que aparece en F_8.

APLICACIÓN: CIRCULOS de FORD:

Existe una conexión entre las sucesiones de Farey los círculos de Ford. Para cada fracción irreductible p/q existe un círculo de Ford C[p/q], que es el círculo de radio $1/2q^2$ y centro en $(p/q, 1/2q^2)$.

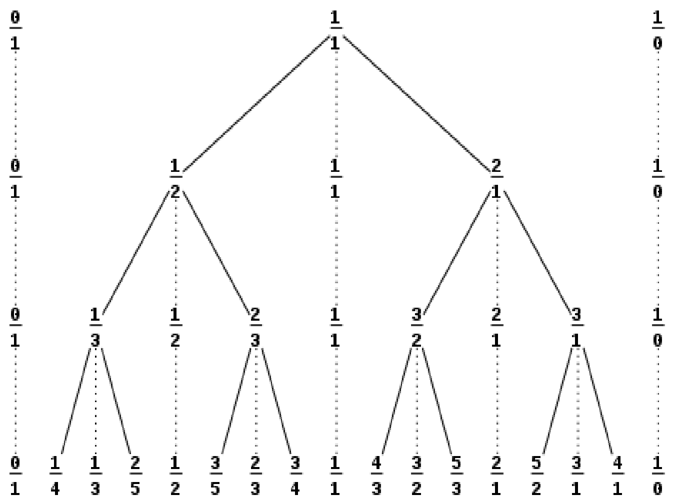
Dos círculos de Ford pueden ser bien disjuntos bien tangentes entre sí - dos círculos de Ford nunca se intersectan.

Si $0<p/q<1$ entonces los círculos de Ford que son tangentes a C[p/q] son precisamente los círculos de Ford de las fracciones que son vecinas de p/q en alguna sucesión de Farey.

Ejemplo, C[2/5] es tangente a C[1/2], C[1/3], C[3/7], C[3/8] etc.

APLICACIÓN: ARBOL de STERN-BROCOT

Es una estructura de datos que muestra cómo se construye la sucesión desde el término primero (= $^0/_1$) y segundo (= $^1/_1$), tomando los sucesivos cocientes de sumas de numeradores y denominadores.



Las fracciones que aparecen como vecinas en una sucesión de Farey tienen expansiones en fracciones continuas relacionadas

Cada fracción tiene dos expansiones en fracciones continuas - en una de ellas el último término es 1; en la otra el último término es mayor que 1

Si $^p/_q$, que aparece por primera vez en una sucesión de Farey F_q, tiene expansiones e fracciones continuas como

$[0;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,1]$
$[0;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n+1]$

entonces, el vecino más cercano de $^p/_q$ en F_q (que será su vecino con mayor denominador) tiene una expansión en fracciones continuas como: **$[0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$**

y su otro vecino tiene una expansión en fracciones continuas como: **$[0;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]$**

Ejemplo: $^3/_8$ tiene dos expansiones en fracciones continuas [0;2,1,1,1] y [0;2,1,2], y sus vecinos en F_8 son $^2/_5$, que puede expandirse como [0;2,1,1], y $^1/_3$, que puede expandirse como [0;2,1].

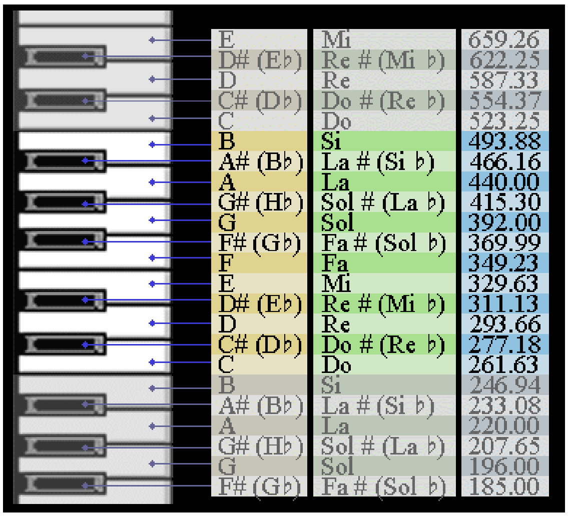
APLICACION: FRECUENCIAS MUSICALES

Mediante una sucesión se puede determinar la frecuencia de una nota posterior, únicamente sabiendo la frecuencia anterior y la cantidad de semitonos que la separa de la incógnita. Con este fin si: $\mathbf{a_n = F.2}^{n/12}$ donde: **F** = Frecuencia de de la nota conocida y **n** = Semitonos de distancia

Conceptos musicales:

Octava: Intervalo que separa dos sonidos cuyas frecuencias tienen una relación de dos a uno.
Intervalo: Diferencia de frecuencia entre dos notas musicales, medida cualitativamente en semitonos.
Semitono: Equivalente al intervalo musical entre dos teclas adyacentes de cualquier instrumento de teclado
Tono: Es la distancia equivalente a dos semitonos.
Nota: El término se refiere a un sonido determinado por una vibración

Octava principal: Las teclas forman grupos de 12 (7 blancas y 5 negras), y estos grupos se repiten a de izquierda a derecha, estando ordenado según la frecuencia de izquierda a derecha.
Cada octava tecla blanca cierra un grupo y abre el otro, y la distancia musical entre esas teclas se llama octava, y su frecuencia tiene relación de 2:1 - asi, la frecuencia de la misma nota de siguiente octava es el doble, y la de octava anterior es la mitad.
La distancia de dos octavas le corresponde a la relación de frecuencias de 4:1, tres octavas - 8:1 etc.: para sumar distancias tenemos que multiplicar las relaciones de frecuencias. El conjunto de notas que se resalta en el diagrama corresponde a la octava principal, en la cual se encuentra un “La” de 440 Hz
La deducción de la formula parte del dato de que cada 12 notas (octava) la frecuencia se duplica, y gracias a esto podemos sacar la constante de proporcionalidad entre 2 notas consecutivas que llamaremos “x”.



$$\mathbf{F_1 = x^{12}\, F_0 \rightarrow F_1 = 2\, F_0 \rightarrow x^{12}} = \frac{2F_0}{F_0} \rightarrow \mathbf{x} = \sqrt[12]{2}$$

$\mathbf{F_0}$= Frecuencia conocida de una nota.

$\mathbf{F_1}$= Frecuencia de la misma nota en una octava superior.

x= Constante de proporcionalidad entre las frecuencias de 2 notas consecutivas
Una vez conocida esta constante, resulta:

Expresion	Para la nota
$\mathbf{F_1 = x^{12}\, F_0}$	Inmediata posterior a $\mathbf{F_0}$
$\mathbf{F_2 = F_0} \sqrt[12]{2}\ \sqrt[12]{2} = \mathbf{F_0\, 2^{2/12}}$	Inmediata posterior a $\mathbf{F_1}$
$\mathbf{F_3 = F_0} \sqrt[12]{2}\ \sqrt[12]{2}\ \sqrt[12]{2} = \mathbf{F_0\, 2^{3/12}}$	Inmediata posterior a $\mathbf{F_2}$
$\mathbf{F_n = F_0\, 2^{n/12}}$	Inmediata posterior a $\mathbf{F_{n-1}}$

Se usara $\mathbf{F_0}$ =27,50 Hz, que es la nota “La” de menor frecuencia que puede escuchar el oído humano. Así la ecuación será: $\mathbf{F_n = 27.5\ Hz.\ 2}^{n/12}$

Ejemplo: Si necesitamos saber la frecuencia de una nota, se debe tener en cuenta que esta tiene la frecuencia de la nota anterior por $\sqrt[12]{2}$ = 1,059463094359. Tomando la frecuencia 27,50 de un "La" llegamos a $\mathbf{F_n = 27.5\ Hz.\ 2^{n/12}}$, Luego:

N	Nota	Frecuencia (Hz)	Incremento De Frecuencia
1	**La**	**27,50**	**105,94630943593%**
2	La# (si b)	29,14	105,94630943593%
3	Si	30,87	105,94630943593%
4	Do	32,70	105,94630943593%
5	Do# (Re b)	34,65	105,94630943593%
6	Re	36,71	105,94630943593%
7	Re# (Mi b)	38,89	105,94630943593%
8	Mi	41,20	105,94630943593%
9	Fa	43,65	105,94630943593%
10	Fa# (sol b)	46,25	105,94630943593%
11	Sol	49,00	105,94630943593%
12	Sol# (la b)	51,91	105,94630943593%
N	**Nota**	**Frecuencia (Hz)**	**Incremento De Frecuencia**
13	**La**	**55,00**	**105,94630943593%**
14	La# (si b)	58,27	105,94630943593%
15	Si	61,74	105,94630943593%
16	Do	65,41	105,94630943593%
17	Do# (Re b)	69,30	105,94630943593%
18	Re	73,42	105,94630943593%
19	Re# (Mi b)	77,78	105,94630943593%
20	Mi	82,41	105,94630943593%
21	Fa	87,31	105,94630943593%
22	Fa# (sol b)	92,50	105,94630943593%
23	Sol	98,00	105,94630943593%
24	Sol# (la b)	103,83	105,94630943593%

Análisis de la sucesión:
La función tiene una cota inferior en 27,50 Hz, y aunque no debería tener cota superior, se podría poner una en 19912,13 Hz (n115) porque el odio humano solo escucha frecuencias entre 20 Hz y 20.000 Hz. Los sonidos de frecuencias mayores el oído humano no las puede captar, pero como la música, que tiene por receptor al ser humano no necesita frecuencias mayores a esta.

CRITERIO DE CAUCHY: Una sucesión { a_n } converge ⇔ para cualquier valor ε dado, existe cierto número entero N tal que | a_m - a_n | < ξ para todo par de valores m, n > N

Para probar, suponemos que { $\mathbf{a_n}$ } converge a A, asi se cumple la condición: $|\mathbf{a_m - a_n}| < \xi$.

Para ello: $|\mathbf{a_m - a_n}| = |a_m - A + A - \mathbf{a_n}| = |a_m - A| + |A - \mathbf{a_n}|$

- De la definición de convergencia, existe un nro entero N tal que $|ak - A| < \xi/2$ para toda $k > N$
- Por tanto para el par **m, n** > **N** se cumple que $|\mathbf{a_n - A}| < \xi/2$ y también $|\mathbf{a_m - A}| < \xi/2$ de donde $|\mathbf{a_m - a_n}| < \xi$ demuestra que { $\mathbf{a_n}$ } converge y por lo tal, existe un entero N que cumple con la condición $|\mathbf{a_m - a_n}| < \xi$ para el par m, n > N

Series Infinitas

SERIES INFINITAS

DEFINICIÓN:

Si en la sucesión { a_n } cuyos términos son: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, se cumple que:

- $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$,
- **$\{S_n\}$ es una sucesión de sumas parciales llamada SERIE INFINITA:**

Permiten investigar diversas funciones, matemáticas de típicas aplicaciones de la ingeniería.

Ejemplo:

El logaritmo nepereano tiene por base a la serie infinita:

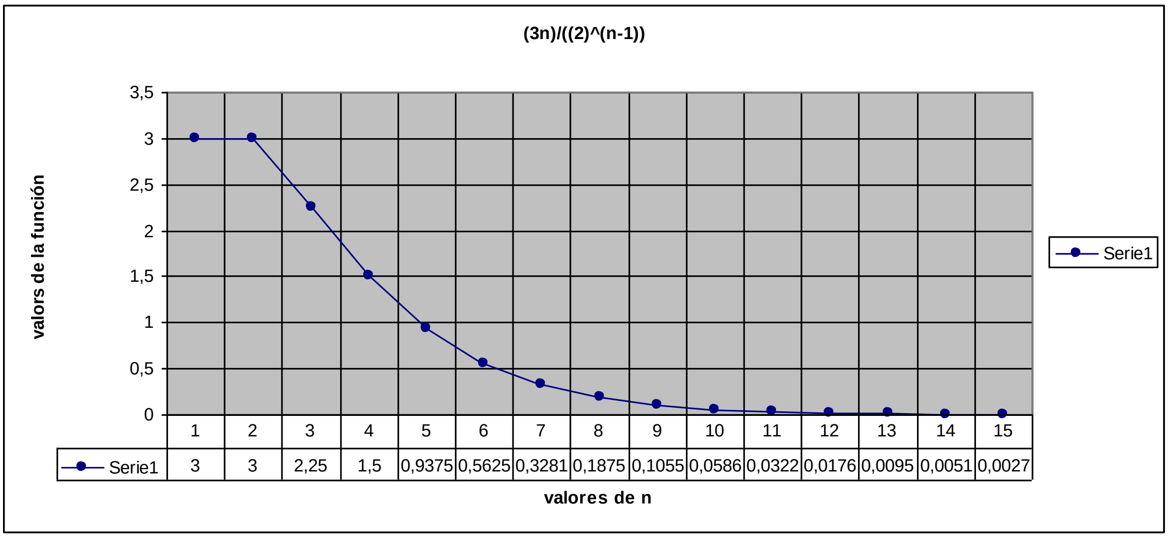
$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots =$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Ejemplo: A partir de la sucesión: $\{a_n\} = \left\{\frac{3n}{2^{n-1}}\right\}$, generamos la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^{n-1}} = 3 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{12}{8} + \ldots + \frac{3n}{2^{n-1}} + \ldots$$

que es la **serie infinita**, cuyo gráfico es



Ejemplo: A partir de la sucesión: $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$, generamos la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

CONVERGENCIA EN SERIES

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + ..$$

DEFINICIÓN: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **es una serie infinita dada, cuya sucesión de sumas parciales es** $\{ S_n \}$; **y si:**

- **$\text{Lím}_{n\to oo} S_n$ $\exists$ y es igual a S: La serie CONVERGE y S es la suma de la serie.**
- **$\text{Lím}_{n\to oo} S_n$ no $\exists$, La serie DIVERGE y No tiene suma**

SERIES ALGEBRAICAS

Un término es igual al término anterior más un cierto valor constante denominado razón.

$a_2 = a_1 + \text{Constante}$

Así, en la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + ..$

- **La serie algebraica es**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + r) = a_1 + (a_1 + r) + +(a_2 + r) + (a_3 + r) + \ldots + (a_{n-1} + r)$
- **La constante es:** $r = a_1 r - a_1$

SERIES GEOMÉTRICAS

Un término es igual al término anterior multiplicado por un cierto valor constante denominado razón.

$a_2 = a_1 . \text{Constante}$

Así, en la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + ..$

- **Serie geométrica**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + \ldots$
- **La constante es:** $r = a_1 r / a_1$
- **La suma:** $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$; para $| r | > 1$

  $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$; para $| r | < 1$

TEOREMA: CONVERGENCIA EN SERIES GEOMÉTRICAS

Si la serie infinita: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + \ldots$ **cuya sucesión de sumas parciales es** $\{S_n\}$ **y si el** $\text{Lím}_{n\to oo} S_n$:

- **$\exists$ y es igual a S, luego: La serie CONVERGE y S es la suma de la serie**
- **No $\exists$, entonces la serie: DIVERGE y no tiene suma**

Ejemplo: Para ver si converge o diverge la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ..$, verificamos si $\exists$ **Lím$_{n\to oo}$**:

- En esta serie: $\mathbf{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ..)$, cuyo el 1er término: $\mathbf{a_1 = 1}$ cuya razón es $\mathbf{r = ½}$, aplicamos la fórmula de la suma de términos de la progresión geométrica:

  $$\mathbf{S_n} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

  Luego: **Lím$_{n\to oo}$ S$_n$ = Lím$_{n\to oo}$** $\{2(1 - \frac{1}{2^n})\}$ = **Lím$_{n\to oo}$** $\{2\}$ - **Lím$_{n\to oo}$**$\{2\frac{1}{2^n}\}$ = 2 – 0 = 2,

  Como **Lím$_{n\to oo}$ S$_n$** $\exists$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ es convergente y 2 es la suma de la serie.

Ejemplo: Para determinar si la serie generada por: $\mathbf{a_n} = \frac{3}{2^{n-1}}$, converge o diverge.

Es necesario verificar si $\exists$ **Lím$_{n\to oo}$**:

- En esta serie: $\mathbf{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n} = (\frac{3}{2^{1-1}} + \frac{3}{2^{2-1}} + \frac{3}{2^{3-1}} + \frac{3}{2^{4-1}} + ... + \frac{3}{2^{n-1}}) = (3 + 3/2 + 3/4 + 3/8 + 3/16 + ...)$,

  cuyo el 1er término: $\mathbf{a_1 = 3}$ cuya razón es: $\mathbf{r} = \frac{3/2}{3}$ $= \mathbf{1/2 < 1}$, por la fórmula de la suma de términos de la progresión geométrica:

  $$\textbf{Lím}_{n\to oo}\ \mathbf{S_n} = \textbf{Lím}_{n\to oo} \left\{ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \right\} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-1/2} = \mathbf{6}$$

  Como **Lím$_{n\to oo}$ S$_n$** $\exists$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$ converge y **6**, es la suma de la serie.

Ejemplo: Para ver si la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n} = \frac{1}{1^P} + \frac{2}{2^P} + \frac{4}{4^P} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^P} + \cdots$, converge o diverge:

- Razón $\mathbf{r} = \frac{2}{2^P} / \frac{1}{1^P} = \frac{2}{2^P}$ para P > 1 es $\mathbf{r} < 1$, y como $a_1 = \frac{1}{1^P} = 1$,
- Suma: $\mathbf{S_n} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} = 1/(1 - \frac{2}{2^P}) = \frac{2^P}{2^P - 2}$, como $\mathbf{S_n > 1}$, la serie converge.
- **Para: | r | > 1:** $Lim \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \lim \frac{a_1 r^n}{r-1} - \lim \frac{a_1}{r-1} = \infty - \frac{a_1}{r-1} = \infty$, la serie diverge y el valor de la suma depende del signo del numerador $\mathbf{a_1}$.

  Si $\mathbf{a_1}$ es $(+) \Rightarrow S_n = \infty$ Si $\mathbf{a_1}$ es $(-) \Rightarrow S_n = -\infty$

Teorema: **La serie geométrica es:**	• **Convergente a la suma** $\frac{a_1}{1-r}$ **cuando** $\|r\| < 1$
	• **Divergente cuando** $\|r\| \geq 1$

Teorema:
Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge, entonces** $\mathbf{Lim_{n\to oo}\ a_n = 0}$

Para demostrar: $\mathbf{a_n = S_n - S_{n-1}}$, luego:
$\mathbf{Lim_{n\to oo}\ a_n = Lim_{n\to oo}(S_n - S_{n-1})}$
$\mathbf{= Lim_{n\to oo}\ S_n - Lim_{n\to oo}S_{n-1} = S - S = 0}$.

Asi, si: $\mathbf{Lim_{n\to oo}\ a_n \neq 0}$, luego $\sum_{n=1}^{+\infty}$ $\mathbf{a_n}$ **es divergente**

Ejemplo: Para ver si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 2 + 5/4 + 10/9 + 17/16 + \ldots + \frac{n^2+1}{n^2}$, converge o diverge.

- $Lím_{n\to+\infty}\ \mathbf{a}_n = Lím_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = Lím_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1} = 1 \rightarrow Lím_{n\to+\infty}\ \mathbf{a}_n \neq 0,$
- Luego, la serie **diverge** por que el límite de su término enésimo no es cero

Ejemplo: Para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 3.(-1)^{n+1} = 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots + 3.(-1)^{n+1}$, converge o diverge.

- $Lím_{n\to+\infty}\ 3.(-1)^{n+1}$ no existe
- Luego, la serie **diverge** por que el límite de su término enésimo no es cero

Ejemplo: Para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$, converge o diverge.

- $Lím_{n\to+\infty}\ \mathbf{a}_n = Lím_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = Lím_{n\to+\infty} \frac{1}{2+1/n} = ½ \rightarrow Lím_{n\to+\infty}\ \mathbf{a}_n \neq 0$
- Luego, la serie **diverge** por que el límite de su término enésimo no es cero

SERIES INFINITAS DE TERMINOS POSITIVOS:

La serie de términos positivos es aquella cuyo término es $a_n \geq 0$, por tanto n debe pertenecer al conjunto de números naturales: $\forall\ n \in N\ ,\ a_n \geq 0$

La sucesión de sumas parciales de estas series es creciente y tiene una cota inferior cero y si tal sucesión tiene una cota superior, entonces la sucesión es monótona y acotada.
Como acotamiento y convergencia de la sucesión monótona son propiedades equivalentes, luego tal serie es convergente

TEOREMA:

La serie infinita de términos positivos es convergente ⇔ su sucesión de sumas parciales tiene una cota superior.

Ejemplo: Para determinar la convergencia en la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = S_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3....n} \quad (1)$$

Calculo cota superior y aplico el teorema que dice que la serie es:

- Convergente a la suma $\frac{a_1}{1-r}$ cuando $|r| < 1$
- Divergente cuando $|r| \geq 1$

Ejemplo: Para determinar la convergencia en la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$

Por el criterio de comparación, para $a = 1$ y $r = ½$ en la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2$ Comparando con la serie (1)
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2.!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

Resulta: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, así $k = 3$ será $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$,

Luego, $Sn = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < 2$

Así, 2 es la cota superior de $\{Sn\}$, luego la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

TEOREMA: Sea la serie de términos positivos: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **, si:**

- $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ **es serie de términos positivos convergente y** $u_n \le v_n$ **para números enteros positivos n,**

  entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **es convergente**

- $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ **es serie de términos positivos divergente y** $u_n \ge w_n$ **para números enteros positivos n,**

  entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **es divergente**

Se especifica que al comparar término a término las series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, si:

- $\sum b_n$ **es convergente y** $a_n \le b_n \; \forall \; n \in N$ **la serie** $\sum a_n$ **es convergente (Serie Mayorante)**
- $\sum b_n$ **es divergente y** $a_n \ge b_n \; \forall \; n \in N$ **la serie** $\sum a_n$ **es divergente (Serie Minoral)**

Ejemplo: Por el método de comparación, para determinar si la serie $\sum \frac{1}{n!}$, converge o diverge.

- $a_n = \sum \frac{1}{n!} = 1 + ½ + 1/6 + 1/24 + \ldots + 1/n! + \ldots$
- $b_n = \sum \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + ½ + 1/2.2 + 1/2.2.2 + \ldots + 1/2^{n-1} + \ldots$ **Serie convergente conocida**

Serie:	Para **n =**	**1**	**2**	**3**	**4**	**N**
$\sum a_n$	$= \sum \frac{1}{n!} =$	1	½	1/6	1/24	$\frac{1}{n!}$
$\sum b_n$	$= \sum \frac{1}{2^{n-1}} =$	1	½	½.2	1/2.2.2	$\frac{1}{2^{n-1}}$
	$a_n \le b_n$	1 = 1	½ = ½	1/6 < ¼	1/24 < 1/8	$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

Resulta: $a_n \le b_n \; \forall \; n \in N$ y como $\sum b_n$ es mayorante y es convergente, $\sum a_n$ será convergente.

Para demostrar que la serie $\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \ldots$ de orden **P** converge para **P>1** agrupo como:

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^P} + \left(\frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P}\right) + \left(\frac{1}{4^P} + \frac{1}{5^P} + \frac{1}{6^P} + \frac{1}{7^P}\right) + \left(\frac{1}{8^P} + \cdots + \frac{1}{15^P}\right) + \cdots \quad (1)$$

Por "Criterio de comparación" tomando como referencia la serie geométrica ya demostrada que es convergente:

- $\frac{1}{1^P} + \frac{2}{2^P} + \frac{4}{4^P} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}\right)^P} + \cdots$ **(2)** la que podemos poner en la forma:
- $\frac{1}{1^P} + \left(\frac{1}{2^P} + \frac{1}{2^P}\right) + \left(\frac{1}{4^P} + \frac{1}{4^P} + \frac{1}{4^P} + \frac{1}{4^P}\right) + \left(\frac{1}{8^P} + \cdots + \frac{1}{8^P}\right) + \cdots$ **(3)**

Comparado **(1)** y **(3)**, vemos los términos entre paréntesis, después del primer grupo, la suma en **(1)** es menor que la suma en **(3)**. Por tanto la serie (1) es CONVERGENTE.

SERIES de ORDEN P:

Tiene la forma:

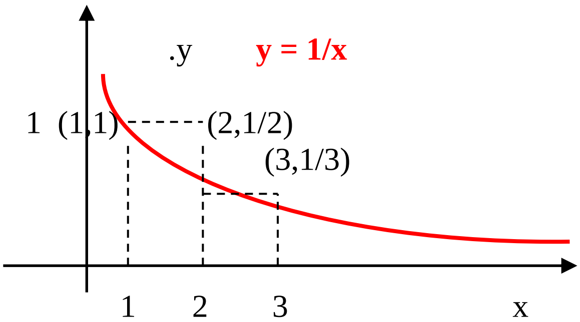
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \ldots$$

- **Si $P > 1$, Converge**
- **Si $P < 1$, Diverge**
- **Si $P = 1$, Es Armónica divergente.**

Ejemplo: **1 + ½ + 1/3 + ¼ + . . . + 1/n + . .**

TEOREMA: **La serie armónica es divergente**

Ejemplo: Para demostrar graficamos la función **y = 1/x**, cuyo término **1/n** representa geométricamente el número de unidades cuadradas del área del rectángulo que tiene **1** de ancho y **1/n** de altura



La suma de las áreas de los **n** rectángulos es: $1 + ½ + 1/3 + ¼ + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

El área del rectángulo del término enésimo es $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx = \ln(n+1)$ luego, $S_n > \ln(n+1)$

Así **{Sn}** es una sucesión creciente monótona no acotada, por lo tanto es divergente

ÁLGEBRA DE LAS SERIES:

- **Si se multiplica por un número real K cada término de una serie $\sum a_n$, que converge a un valor A, la nueva serie también es convergente:**
  $$\sum a_n \to A \Rightarrow \sum K a_n \to K A$$

- **Sea $\sum a_n \to A$ una serie convergente al valor A y $\sum b_n \to B$ otra convergente a B, implica que $\sum (a_n \pm b_n)$ será una serie convergente al valor suma $A \pm B$**

- **Si $\sum a_n$ convergente y $\sum b_n$ divergente $\Rightarrow \sum a_n + b_n$ será una serie divergente.**

- **Si en una serie se suprime un número finito de términos iniciales de suma K, la nueva serie es divergente o convergente como la serie inicial. Si la serie $\sum a_n \to A$ era convergente a un valor A, entonces la nueva serie converge a (A - K).**

CRITERIOS DE CONVERGENCIA EN SERIES INFINITAS

CRITERIO de convergencia del COCIENTE o de D'ALEMBERT

Si a_{n+1} es término sucesivo de a_n en la serie $\sum a_n$, al calcular la expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \text{ , resulta:}$$

- **Si L < 1 , la serie $\sum a_n$ es convergente**
- **Si L > 1, la serie $\sum a_n$ será divergente**
- **Si L = 1, no expresa indicador sobre la convergencia de $\sum a_n$**

Ejemplo: Para determinar la convergencia de la serie: $\sum a_n = \sum \frac{n}{5^n}$, aplico este criterio en la serie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \lim \frac{5^n(n+1)}{5^n.5.n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{5.n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5.n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5.n} = \frac{1}{5}$$

Como $\frac{1}{5} < 1$ $\therefore$ La serie $\sum a_n = \sum \frac{n}{5^n}$ es convergente.

EJERCICIOS RESUELTOS:

1) Aplicando el criterio del cociente de D'alambert, determinar la convergencia de las series:

1.a) En la serie $\sum a_n = 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \ldots \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum 2^{n-1} / 3^{n-1}$

Aplico el criterio del Cociente: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1-1}}{3^{n+1-1}}}{\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}} = \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-n+1} = \frac{2}{3} < 1$

Como $\lim \sum 2^{n-1} / 3^{n-1} < 1$, la serie es CONVERGENTE

1.b) $\sum \frac{n+1}{n}$

Solución: $\lim \frac{n+1}{n} = \lim (1 + 1/n) = 1 + 0 = 1$ $\therefore$ la serie es DIVERGENTE

1.c) En la serie $1/10 + 2!/10^2 + 3!/10^3 + \ldots + \frac{n!}{10^n} + \ldots$

$$\lim \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim \frac{(n+1)(n+1-1)!}{10^{n+1}} \frac{10^n}{n!} = \lim(n+1)10 = \lim 10n + \lim 10 = \infty + 10 = 10$$

Como L > 1 $\Rightarrow$ La serie es DIVERGENTE

1.d) En la serie $\sum 1 / (2^{n-1} + 1)$

$$\lim \frac{\dfrac{1}{2^n+1}}{\dfrac{1}{2^{n-1}+1}} = \lim \frac{2^{n-1}+1}{2^n+1} = \lim \frac{2^n(2^{-1}+1/2^n)}{2^n(1+1/2^n)} = \frac{1}{2}$$

Como L < 1 La serie converge

1.e) En la serie $\sum [\, 2^{2n-1} / (n^2 + n)]$

$$\lim \left(\frac{2^{2n+2-1}}{(n+1)^2+(n+1)} \right) \left(\frac{n^2+1}{2^{2n-1}} \right) = \lim \left(2^2 \frac{n^2+n}{n^2+2n+1+n+1} \right) = \lim \left(\frac{n^2(4+4/n)}{n^2(1+3/n+2/n^2)} \right) = \frac{4+0}{1+0} = 4$$

Como L > 1 $\Rightarrow$ La serie es DIVERGENTE

1.f) En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ 2n}$ Aplico el criterio del cociente: $a_{n+1} = \frac{1}{4(n+1)^2 - 2(n+1)}$

$$\lim \frac{\dfrac{1}{4(n+1)^2-2(n+1)}}{\dfrac{1}{(2n-1)2n}} = \lim \frac{(2n-1)2n}{4n^2+8n+4-2n-2} = \lim \frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2} =$$

$$\lim \frac{\cancel{n}^2\left(4-\dfrac{2}{n}\right)}{\cancel{n}^2\left(4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{4-0}{4+0+0} = 1$$

Como L = 1, el criterio no suministra información

1.g) En la serie $\sum \frac{n!}{100^n}$

$$\lim \left[\frac{\dfrac{(n+1)!}{(100)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{100^n}} \right] = \lim \left[\frac{100^n\ (n+1)f}{nf\ (100)^{n+1}} \right] = \lim \left[\frac{100^n\ \cancel{n}f}{\cancel{n}f} \right] = \infty$$

como L > 1 (Divergente)

CRITERIO de la RAIZ ENESIMA

Si en la serie $\sum a_n$ calculamos el $\lim_{n\to\infty}$ de la raíz enésima de a_n : $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

- **Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente**
- **Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ será divergente**
- **Si $L = 1$, no expresa indicador sobre la convergencia de $\sum a_n$**

Ejemplo: Para determinar la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{como } L < 1 \quad \text{(Convergente)}$$

2) Por criterio de la raíz enésima, determinar la convergencia de la serie:

2.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Solución: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \qquad \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$ como $L < 1$ (Convergente)

2.b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Solución: $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} =$ L'Hop.

CRITERIO de la INTEGRAL de CAUCHY

Si la serie de términos positivos $\sum a_n$, tiene una función positiva y decreciente $f_{(x)}$, para $x \geq 1$, tal que $f_{(n)} = a_n$,

entonces, la serie será:

- **Convergente si existe la integral** $\int_1^{\infty} f(x)dx$
- **Divergente si no existe** $\int_1^{\infty} f(x)dx$

Ejemplo: Para determinar la convergencia de la serie: $\sum a_n = \frac{1}{n}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} (1/x)dx = \lim_{a\to\infty} \ln|_1^a = \lim_{a\to\infty} (\ln a - \ln 1) = \infty - 0 = \infty$$

Como no existe la integral, la serie armónica es DIVERGENTE

3.- Por criterio de Cauchy, determinar la convergencia de las series:

3.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Solución: $\text{Lim}_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{n(n+1)} dn = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{n} dn - \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{n+1} dn =$

$\lim \left(\ln|a| - \ln|1|\right) - \lim\left(\ln|a+1| - \ln|2|\right) = \infty - 0 - \infty + 0.69 = 0.69$ (Convergente)

3.b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n^2}$

Solución: $\text{Lim}_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{1+n^2} dn = \lim_{a\to\infty} \left(\text{arctg } a - \text{arctg } 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ (Convergente)

3.c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$

Solución: $\text{Lim}_{a\to\infty} \int_1^a \frac{2}{2n+1} dn = \lim_{a\to\infty} \left[2\left(\ln|2a+1| - \ln|3|\right)\right] = \infty$ (Divergente)

CRITERIO de RAABE

Si a_{n+1} es el término sucesivo de a_n de una serie de términos positivos $\sum a_n$, si al calcular la expresión: L = $\lim \left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right]$

- **Si L > 1 , la serie $\sum a_n$ es convergente**
- **Si L < 1, la serie $\sum a_n$ será divergente**
- **Si L = 1, no expresa indicador respecto de la convergencia de $\sum a_n$**

Ejemplo: **Determinar la convergencia de la serie:** $\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$\lim \left[n.\left(1-\frac{\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}}{\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}}\right)\right] = \lim \left[n.\left(1-\frac{(n+1)^2}{n(n+4)}\right)\right] = \lim \left[n.\left(1-\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n}\right)\right]$$

$$\lim \left[n.\left(\frac{2n-1}{n^2+4n}\right)\right] = \lim \left(\frac{2n^2-n}{n^2+4n}\right) = \lim \frac{n^2(2-1/n)}{n^2(1-4/n)} = 2$$

Como L > 1 $\Rightarrow$ la serie es CONVERGENTE

4) Por criterio de Raabe, determinar la convergencia de la serie:

4.a) $\sum$ 3 / n (n+1)

Solución:

$$\lim \left[n.\left(1-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right)\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)\right] = \lim \left[n.\left(\frac{n+2-n}{n+2}\right)\right] = \lim \frac{2n}{n+2} = \lim \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(1+2/n)} = 2$$

Como L > 1 $\Rightarrow$ La serie es CONVERGENTE

4.b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Solución:

Lim

$$\left[n\left(1-\frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}\right)\right] = \lim \left[n\left(1-\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right)\right] = \lim \left[n\left(\frac{n^2+2n+2-n^2-1}{n^2+2n+2}\right)\right] = \lim \frac{2n^2+n}{n^2+2n+2}$$

$$\lim \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+0}{1+0+0} = 2 \Rightarrow \quad \text{como } L > 1 \text{ (Convergente)}$$

4.c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Solución: $\text{Lim}\left[n\left(1-\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right)\right] = \lim\left[n\left(1-\frac{n(\cancel{n+1})}{(\cancel{n+1})(n+2)}\right)\right] = \lim\left[n\left(1-\frac{n}{n+2}\right)\right]$

$= \text{Lim}\left[n\left(\frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}}{n+2}\right)\right] = \text{Lim}\ \frac{2n}{n+2} = \text{L'Hosp.} = \frac{2}{1} = 2$ como L > 1 (Convergente)

4.d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2}$

Solución: $\text{Lim}\left[n\left(1-\frac{\frac{5}{(n+1)^2}}{\frac{5}{n^2}}\right)\right] = \lim\left[n\left(1-\frac{\cancel{5}n^2}{\cancel{5}\left(n^2+2n+1\right)}\right)\right] =$

$\text{Lim}\left[n\left(\frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}}{n^2+2n+1}\right)\right] = \lim\left[\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}\right] = \text{L'Hosp.} = \lim\left[\frac{4n+1}{2n+2}\right] = \text{L'Hosp.} =$

$\frac{4}{2} = 2$ Como L > 1 (Convergente)

CRITERIO DE LA SERIE ALTERNANTE: $\sum U_n$

$\sum U_n$ Posee términos alternativamente positivos y negativos.

DEFINICIÓN: Sea $a_n > 0$ para los números enteros positivos n, entonces las siguientes series son alternates

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n} a_n$

La serie alternante $\sum U_n$, es:

CONVERGENTE: Cuando es estrictamente decreciente: $|U_{n+1}| < |U_n|$ y $\lim_{a\to\infty} |U_n| = 0$

ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE Si la serie de valores absolutos, o serie de términos positivos $\sum U_n$, converge.

CONDICIONALMENTE CONVERGENTE Si la serie alterna converge, pero no converge la serie de términos positivos.

Ejemplo: **La serie alternante**

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} +$$

- Como: $|U_{n+1}| < |U_n| \rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ para **n** enteros positivos **estrictamente decreciente**
- Además: $\lim_{a\to\infty} |U_n| = 0 \rightarrow \lim \frac{1}{n} = 0$,

Luego **es convergente**.

Ejemplo: En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^1} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2}{3^n} +$

La serie de valores absolutos o de términos posivos

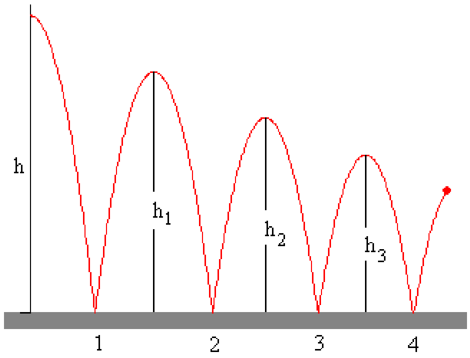
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2}{3^n} +$ es serie geométrica de razón $\frac{1}{3} < 1$, que es convergente; luego es **absolutamente convergente**.

Ejemplo: En la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} +$

- $|U_{n+1}| < |U_n| \rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ para **n** enteros positivos y además: $\lim_{a\to\infty} |U_n| = 0 \rightarrow \lim \frac{1}{n} = 0$, luego **es convergente**
- La serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} +$ es una serie armónica que **diverge**

Luego la serie es **condicionalmente convergente**

APLICACIÓN: CHOQUE ELÁSTICO



Si dejamos caer verticalmente pelotas de tenis:

- En el rebote deben recuperar entre el 53 y el 58% de la altura a la que se soltó.
- Desde una altura de 100m y suponemos que recupera un 55% de la altura en cada rebote y le llamamos r.

La trayectoria de la pelota represenda por la línea roja donde:

- 1, 2, 3 y 4 representan el nº de rebotes

- h= Altura inicial
- h_1= Altura alcanzada después del primer rebote
- h_2= Altura alcanzada después del segundo rebote
- h_3= Altura alcanzada después del tercer rebote

Este experimento muestra que las alturas alcanzadas en cada rebote las podemos interpretar como una sucesión, en la que a_1=1m (altura inicial) y a los siguientes términos como $a_{n+1}= \{a_n * r\}$, como el término siguiente de la sucesión es igual al término anterior multiplicado por un cierto valor constante denominado razón, así dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

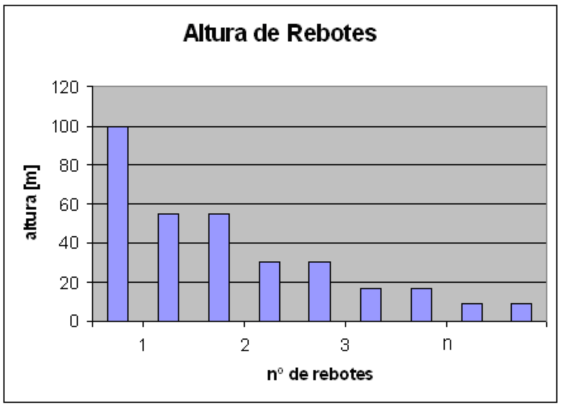
Donde: $\mathbf{a_{n+1}= \{a_n * r\}}$

- a_1= altura inicial
- $a_2= \{a_1 * r\}$
- $a_3= \{a_2 * r\} = \{a_1 * r * r\} = \{a_1 * r^2\}$
- $a_4= \{a_3 * r\} = \{a_2 * r * r\} = \{a_1 * r * r * r\} = \{a_1 * r^3\}$
- $a_n= \{a_1 * r^{n-1}\}$

La serie geométrica será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + \ldots$$

Como: $Sn = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, {Sn} es una sucesión de sumas parciales llamada SERIE INFINITA



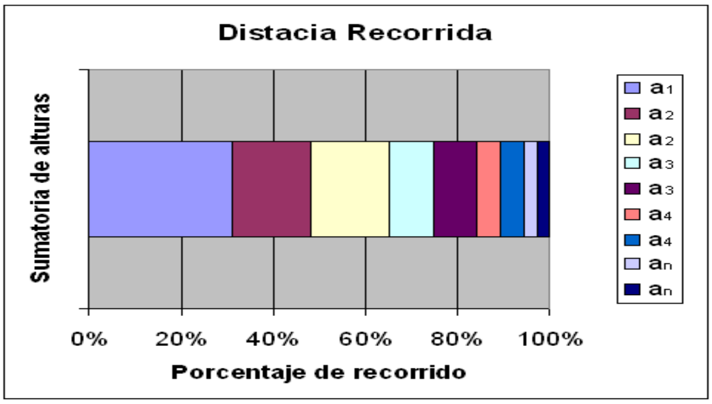
La distancia recorrida **d** a calcular es la distancia recorrida desde la altura inicial hasta el primer rebote mas la distancia que recorre después de cada rebote en ascenso hasta alcanzar la nueva altura y la distancia que recorre en descenso hasta el siguiente rebote, y así sucesivamente hasta alcanzar el reposo.

Entre:
0-1: distancia recorrida desde la altura inicial
1-2: distancia que recorre después del primer rebote en ascenso hasta alcanzar la nueva altura y distancia que recorre en descenso hasta el segundo rebote
2-3: distancia que recorre después del segundo rebote en ascenso hasta alcanzar la nueva altura y distancia que recorre en descenso hasta el tercer rebote
3-n: distancia que recorre después del tercer rebote en ascenso hasta alcanzar la nueva altura y distancia que recorre en descenso hasta el rebote n

Luego la distancia recorrida será la sumatoria de distancias recorridas en cada intervalo y la podemos representar como: d= d(0-1) + d(1-2) + d(2-3) + d(3-n)

Como las distancias recorridas por la pelota en ascenso y en descenso luego de cada rebote son las mismas podemos decir que:

- d(0-1) = a_1 (distancia recorrida desde la altura inicial)
- d(1-2) = a_2 (distancia recorrida en ascenso) + a_2 (distancia recorrida en descenso)
- d(2-3) = a_3 (distancia recorrida en ascenso) + a_3 (distancia recorrida en descenso)
- d(3-n) = a_n (distancia recorrida en ascenso) + a_n (distancia recorrida en descenso)



La distancia recorrida **d** será:

$d= a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + ... + a_n + a_n$
$d= a_1 + a_1 r^1 + a_1 r^1 + a_1 r^2 + a_1 r^2 + ... + a_n r^{n-1}$

Como **r = 0.55**, por lo tanto es menor que **1**

La suma será: $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

El límite:

$$Lím_{n->+\infty} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \lim \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \lim \frac{a_1}{1-r} - \lim \frac{a r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es serie infinita cuya sucesión de sumas parciales es {Sn}; el $Lím_{n->+\infty} S_n \; \exists$ y es = S, la serie CONVERGE y S es suma de la serie.

La distancia **d** recorrida por la pelota será: **$d= a_1 + a_1 r^1 + a_1 r^1 + a_1 r^2 + a_1 r^2 + ... + a_n r^{n-1}$**

$d= 100 + [100 * (0.55) + 100 * (0.55) + 100 * (0.55)^2 + 100 * (0.55)^2 + \ldots]$
$d= 100 + 2* [100 * (0.55) + 100 * (0.55)^2 + \ldots + 100 * (0.55)^n + \ldots]$
La serie que aparece entre corchetes es serie geométrica infinita con: **$a_1= 100 * (0.55)$** y **r = 0.55**.
Si **S** es la suma de esta serie, entonces:

$d= 100 + 2* [100 * (0.55) + 100 * (0.55) r + \ldots + 100 * (0.55) r^n + \ldots]$

$d= a_1 + 2 * S \rightarrow S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow S = \frac{100x0.55}{1-0.55} \rightarrow S = 122.22$

La pelota recorre: **$d= a_1 + 2 * S \rightarrow d= 100 + 2 * 122.22 \rightarrow d= 344.44$** metros antes de llegar al reposo

APLICACIÓN: LA MOSCA

Una mosca vuela entre dos ciclistas, cada uno avanzando en dirección opuesta a 20 km/h. La mosca vuela de uno de ellos en la dirección del otro, y cada vez que llega a él regresa y vuela al primero. Si la mosca vuela entre los dos hasta que los ciclistas se encuentran, su velocidad es de 30 km/h y la distancia inicial entre los ciclistas es 10 km, ¿cuál es la distancia total que vuela la mosca?

DATOS: Velocidad de los 2 ciclistas 20km/hs // Velocidad de la mosca 30 km/h // Distancia entre los 2 ciclistas 10 km // ¿distancia total de vuelo de la mosca?

En el 1er vuelo, la mosca parte junto con el primer ciclista para encontrarse con el segundo, esto ocurre en el tiempo T, luego: 30T= 10 – 20T, porque el segundo ciclista parte de una distancia de 10km, y en dirección opuesta. Entonces tenemos: $T = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$; 1/5 hs o sea 12 min. Durante el 1er vuelo, la mosca recorrió. $30\frac{km}{hs}x\frac{1}{5}hs = 6$ km

En el 2do vuelo, las bicicletas avanzaron $20\frac{km}{hs}x\frac{1}{5}hs = 4$ km cada una, luego hay 2km entre ellas (6km-4km). Entonces, si T es ahora el tiempo que le toma a la mosca en regresar al primer ciclista, satisface 20T= 2 – 30T, o sea $T = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ Ahora la mosca recorre $30x\frac{1}{25} = \frac{6}{5}$ km =1,2 km.

Por tanto el tiempo que le toma a la mosca en llegar a cada ciclista, en cada vuelo, es siempre 5 veces menor al vuelo anterior. $\frac{1}{5};\frac{1}{25}...$ Así, en total, la mosca vuela $6+\frac{6}{5}+\frac{6}{25}+\ldots+\frac{6}{5^n}+\ldots = 6\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)$

$$= 6 \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5\text{km}.$$

La mosca recorre en total 7.5km. Se uso la suma de una serie geométrica: $1+x+x^2+x^3+\ldots = \frac{1}{1-x}$, si $|x|<1$. Este es un buen ejemplo donde aparece esta serie.

$a_2 = a_1$. **Constante**. Así dada la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

La serie geométrica será: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + \ldots$

Si deseamos calcular la constante: $r = a_1 r \,/\, a_1$

El valor de suma será: $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$; para $|r| > 1$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$; para $|r| < 1$

Los ciclistas, como viajan a la misma velocidad (20km/h), se encuentran en el punto medio entre ellos, es decir, a 5km de donde partieron. Esto les toma $\frac{5\text{km}}{20\text{km/h}} = \frac{1}{4}\text{h}$. En $\frac{1}{4}\text{h}$, la mosca, a una velocidad de 30km/h, avanza entonces: $30\text{km/h} \times \frac{1}{4}\text{h} = 7.5\text{km}.$

APLICACIÓN: RENTA PERPETUA

Es una serie infinita de cuotas que tienden a infinito, en los fondos de pensiones, seguros de vida y modelos en valoración de empresas, entre otras; donde el valor presente **P** de esta renta perpetua, lo compone un pago único ahora equivalente a la serie infinita de cuotas iguales. $\mathbf{P} = \mathbf{R}\frac{1}{i}$

El factor que convierte **N** cuotas finitas en un pago único presente: $\frac{1-(1-i)^N}{i}$

Cuando en este factor **N** tiende a ∞, es igual al factor **1/i**, el cual convierte infinitas cuotas de valor **R** en un pago único presente equivalente.

Ejemplo: Establecer un fondo de pensiones, para atender a perpetuidad los retiros por cada $1.000.000 mensuales para alguien que desea obtener su pensión de jubilación; en un fondo que reconoce una tasa de interés efectiva anual del 18%.

De la ecuación de valor presente: **P** = **R***[1¸i]. -> **R** es valor del retiro mensual de $1.000.000.

La tasa de interés esta referida para el periodo anual, por lo tanto se debe establecer la tasa de interés periódica mensual: $i_p = (1+i_e)^{1\div p}-1=(1+.18)^{1\div 12}-1=1.39\%$.

Reemplazando en la ecuación de P: **P** = 1.000.000¸.0139 = $72.002.377.

Este es el valor del fondo que permite a perpetuidad, retirar la suma de $1.000.000 para atender la pensión, es un pago único ahora equivalente a la serie infinita de cuotas de valor **R** cada una.

El plan debe considerar el crecimiento, que permita contrarrestar la pérdida del poder adquisitivo del dinero.

SERIE DE FUNCIONES

La función cuyo dominio es el conjunto de números naturales y su rango es un conjunto de funciones escalares $|f_n(x)| = (f_1, f_2, f_3,.. , f_n,..)$, la suma parcial de sus elementos genera la **serie de funciones**:

- $\sum f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)+\ldots+ f_n(x)+\ldots$

  Para un valor $x = x_o$, toma forma de serie numérica:

- $\sum f_n(x_o)=f_1(x_o)+ f_2(x_o)+ f_3(x_o)+\ldots+ f_n(x_o)+\ldots$

Si la serie de funciones converge:

- En valores x_o, será convergente para ese valor de x_o
- $\forall x \,|a<x<b$, la serie converge en el intervalo (a, b)

SERIE DE POTENCIAS

DEFINICIÓN: La serie de potencias en x – h, tiene la forma general:

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - h)^n = a_o (x - h)^o + a_1 (x - h)^1 + a_2 (x - h)^2 + a_3 (x - h)^3+ \ldots+a_n (x - h)^n$$

si: h = 0: $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x)^n = a_o x^o + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3+ \ldots+a_n x^n$

Aplicando el criterio del cociente:
Si U_{n+1} es el término sucesivo de U_n en la serie $\sum a_n$, al calcular: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$, resulta:

- Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente
- Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ será divergente
- Si $L = 1$, no expresa indicador de $\sum a_n$

En:

- $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x)^n = a_o x^o + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3+ \ldots+a_n x^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right|<1 \rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{L}\cdot|x|<1 \rightarrow Lim|x|<1 \rightarrow |x|<\frac{1}{Lim}$$

- $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - h)^n = f_{(x)} = a_o (x - h)^o + a_1 (x - h)^1 + a_2 (x - h)^2 + a_3 (x - h)^3+ \ldots+a_n (x - h)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot(x-h)^{n+1}}{a_n\cdot(x-h)^n}\right|<1 \Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{L}\cdot|x-h|<1 \Rightarrow |x-h|<\frac{1}{Lim}$$

Por tanto: $\frac{1}{Lim}$ define el **intervalo de convergencia** $\left(-\frac{1}{Lim}<(x-h)<\frac{1}{Lim}\right)$

Ejemplo: Analizar si la serie $a_n = \frac{n^n}{n!}$, es convergente o divergente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}\times\left(\frac{1}{n^n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Como $e > 1$, la serie es divergente.

PROPIEDADES de la SERIE DE POTENCIAS: **Toda serie de potencia:**

- **Converge absoluta y uniformemente en todo intervalo interior al intervalo de convergencia.**
- **Puede derivarse e integrarse término a término tantas veces como se desee en cualquier intervalo cerrado [a,b] interior al intervalo de convergencia de la serie.**
- **Define una función continua** $\forall x \in [a,b]$ **que sea interior al intervalo de convergencia de la serie**

SERIE DE MACLAURIN

Colin MacLaurin (1698-1746) fue el matemático escocés, que formuló esta serie:

En: $\mathbf{f}_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_o x^o + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$

Para: $x = 0 \rightarrow f_{(0)} = a_o$

Determino coeficientes: $a_1, a_1, \ldots, a_n$

Derivada	Si x = 0	Coeficiente
• $f'_{(x)} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n.a_n x^{n-1}$	$f'_{(0)} = 1\ a_1$	$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$
• $f''_{(x)} = 2.a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1).a_n x^{n-2}$	$f''_{(0)} = 2\ a_2$	$.a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$
• $f'''_{(x)} = 6a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2).a_n x^{n-3}$	$f'''_{(0)} = 6\ a_3$	$.a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$
• $f^n_{(x)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))\ a_n x^{n-n}$	$f^n_{(0)} = n!\ a_n$	$.a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

Reemplazo coeficientes: $a_1, a_1, \ldots, a_n$, se genera **la serie de MacLaurin**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(o).x^n}{n.!} = f_{(0)} + \frac{f'(o).x^1}{1.!} + \frac{f''(o).x^2}{2.!} + \frac{f'''(o).x^3}{3.!} \ldots + \frac{f^n(o).x^n}{n.!} \qquad \text{[I]}$$

Ejemplo: MacLaurin para $f_{(x)}$ = Sen x

Reemplazo cada valor: $\frac{f^n(o).x^n}{n.!}$

en la formula de Maclaurin

$f_{(x)}$ = sen x → $f_{(0)}$ = sen 0 = 0
$f'_{(x)}$ = cos x → $f'_{(0)}$ = cos 0 = 1
$f''_{(x)}$ = -sen x → $f''_{(0)}$ = -sen 0 = 0
$f'''_{(x)}$ = -cos x → $f'''_{(0)}$ = -cos 0 = -1
$f''''_{(x)}$ = sen x → $f''''_{(0)}$ = sen 0 = 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(o).x^n}{n.!} = f_{(0)} + \frac{f'(o).x^1}{1.!} + \frac{f''(o).x^2}{2.!} + \frac{f'''(o).x^3}{3.!} \ldots + \frac{f^n(o).x^n}{n.!}$$

$$f_{(x)} = \frac{0x^0}{0!} + \frac{1x^1}{1!} + \frac{0x^2}{2!} - \frac{1x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + \frac{1x^5}{5!} + \frac{0x^6}{6!} - \frac{1x^7}{7!} + \frac{0x^8}{8!}$$

Serie de MacLaurin

$$f_{(x)} = sen(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Ejemplo: MacLaurin para $f_{(x)} = e^x$

Reemplazo cada valor: $\frac{f^n(o).x^n}{n.!}$

en la formula de Maclaurin

$f_{(x)} = e^x$ → $f_{(0)}$ = 1
$f'_{(x)} = e^x$ → $f'_{(0)}$ = 1
$f''_{(x)} = e^x$ → $f''_{(0)}$ = 1
$f^n_{(x)} = e^x$ → $f^n_{(0)}$ = 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(o).x^n}{n.!} = f_{(0)} + \frac{f'(o).x^1}{1.!} + \frac{f''(o).x^2}{2.!} + \frac{f'''(o).x^3}{3.!} \ldots + \frac{f^n(o).x^n}{n.!}$$

$$f_{(x)} = \frac{0x^0}{0!} + \frac{1x^1}{1!} + \frac{1x^2}{2!} - \frac{1x^3}{3!} + \frac{1x^4}{4!} + \frac{1x^5}{5!} + \frac{1x^6}{6!} - \frac{1x^7}{7!} + \frac{1x^8}{8!}$$

Serie de MacLaurin

$$f_{(x)} = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + ..$$

Ejemplo: MacLaurin para $f_{(x)}$ = Cos x

Reemplazo cada valor: $\frac{f^n(o).x^n}{n.!}$

en la formula de Maclaurin

$f_{(x)}$ = Cos x → $f_{(0)}$ = Cos 0 = 1
$f'_{(x)}$ = Sen x → $f'_{(0)}$ = Sen 0 = 0
$f''_{(x)}$ = -Cos x → $f''_{(0)}$ = -Cos 0 = -1
$f'''_{(x)}$ = Sen x → $f'''_{(0)}$ = Sen 0 = 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(o).x^n}{n.!} = f_{(0)} + \frac{f'(o).x^1}{1.!} + \frac{f''(o).x^2}{2.!} + \frac{f'''(o).x^3}{3.!} \ldots + \frac{f^n(o).x^n}{n.!}$$

$$f_{(x)} = \frac{0x^0}{0!} + \frac{1x^1}{1!} + \frac{0x^2}{2!} - \frac{1x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + \frac{1x^5}{5!} + \frac{0x^6}{6!} - \frac{1x^7}{7!} + \frac{0x^8}{8!}$$

Serie de MacLaurin

$$f_{(x)} = \text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} +$$

SERIE DE TAYLOR

La serie de Taylor representa una función como una infinita suma de términos, calculados a partir de las derivadas de la función para un determinado valor de la variable (respecto de la cual se deriva).

Si esta serie está centrada sobre el punto cero, es serie de McLaurin, por ello, en la expresión de la serie de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(o).x^{n}}{n.!} = \mathbf{f_{(0)}} + \frac{f'(o).x^{1}}{1.!} + \frac{f''(o).x^{2}}{2.!} + \frac{f'''(o).x^{3}}{3.!} \ldots + \frac{f^{n}(o).x^{n}}{n.!}$$

Al reemplazar **x** por **(x-h)** , se obtiene la Serie de **Taylor**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(h).(x-h)^{n}}{n.!} = \mathbf{f_{(h)}} + \frac{f'(h).(x-h)^{1}}{1.!} + \frac{f''(h).(x-h)^{2}}{2.!} + \frac{f'''(h).(x-h)^{3}}{3.!} + \ldots + \frac{f^{n}(h).(x-h)^{n}}{n.!}$$

Ejemplo: **Taylor** para $\mathbf{f_{(x)} = e^{x}}$

En la formula de Taylor reemplazo cada valor: $\frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!}$

$\mathbf{f_{(x)}} = e^{x} \rightarrow \mathbf{f_{(0)}} = e^{0} = 1$

$\mathbf{f'_{(x)}} = e^{x} \rightarrow \mathbf{f'_{(0)}} = e^{0} = 1$

$\mathbf{f''_{(x)}} = e^{x} \rightarrow \mathbf{f''_{(0)}} = e^{0} = 1$

$\mathbf{f'''_{(x)}} = e^{x} \rightarrow \mathbf{f'''_{(0)}} = e^{0} = 1$

$\mathbf{f''''_{(x)}} = e^{x} \rightarrow \mathbf{f''''_{(0)}}\ e^{0} = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!} = f_{(h)} + \frac{f'(h)(x-h)^{1}}{1!} + \frac{f''(h)(x-h)^{2}}{2!} + \frac{f'''(h)(x-h)^{3}}{3!} + \ldots + \frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!}$$

$$\mathbf{f_{(x)}} = \frac{1(x-h)^{0}}{0!} + \frac{1(x-h)^{1}}{1!} + \frac{1(x-h)^{2}}{2!} + \frac{1(x-h)^{3}}{3!} + \frac{1(x-h)^{4}}{4!} + \frac{1(x-h)^{5}}{5!} + \frac{1(x-h)^{6}}{6!}$$

La serie de Taylor es:

$$\mathbf{f_{(x)}} = e^{x} = 1 + \frac{(x-h)^{1}}{1!} + \frac{(x-h)^{2}}{2!} + \frac{(x-h)^{3}}{3!} + \frac{(x-h)^{4}}{4!} + \frac{(x-h)^{5}}{5!} + \frac{(x-h)^{6}}{6!}$$

Ejemplo: **Taylor** para $\mathbf{f_{(x)}}$ **= Sen x** en **¼ π** para: a = 0

En la formula de Taylor reemplazo cada valor: $\frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!}$

$\mathbf{f_{(x)}} = \text{sen } x \rightarrow \mathbf{f_{(0)}} = \text{sen } 0 = 0$

$\mathbf{f'_{(x)}} = \cos x \rightarrow \mathbf{f'_{(0)}} = \cos 0 = 1$

$\mathbf{f''_{(x)}} = -\text{sen } x \rightarrow \mathbf{f''_{(0)}} = -\text{sen } 0 = 0$

$\mathbf{f'''_{(x)}} = -\cos x \rightarrow \mathbf{f'''_{(0)}} = -\cos \mathbf{0} = -1$

$\mathbf{f''''_{(x)}} = \text{sen } x \rightarrow \mathbf{f''''_{(0)}} = \text{sen}\mathbf{0} = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!} = f_{(h)} + \frac{f'(h)(x-h)^{1}}{1!} + \frac{f''(h)(x-h)^{2}}{2!} + \frac{f'''(h)(x-h)^{3}}{3!} + \ldots + \frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!}$$

$$\mathbf{f_{(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{1}{4}\pi) - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}*(x-\frac{1}{4}\pi)^{2}}{2!} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}*(x-\frac{1}{4}\pi)^{3}}{3!} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}*(x-\frac{1}{4}\pi)^{4}}{4!} + \ldots$$

La serie de Taylor es:

$$\mathbf{f_{(x)}} = \text{Sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x-\frac{1}{4}\pi) - \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^{2}}{2!} - \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^{3}}{3!} + \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^{4}}{4!} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

Ejemplo: **Taylor** para $\mathbf{f_{(x)}}$ **= ln x** para: a = 1

En la formula de Taylor reemplazo cada valor: $\frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!}$

$\mathbf{f_{(1)}} = 0, \quad \mathbf{f'_{(1)}} = \frac{1}{x} = 1$

$\mathbf{f''_{(1)}} = -\frac{1}{x^{2}} = -1$

$\mathbf{f'''_{(1)}} = \frac{1}{x^{3}} = 1$

$\mathbf{f''''_{(1)}} = -\frac{1}{x^{4}} = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!} = f_{(h)} + \frac{f'(h)(x-h)^{1}}{1!} + \frac{f''(h)(x-h)^{2}}{2!} + \frac{f'''(h)(x-h)^{3}}{3!} + \ldots + \frac{f^{n}(h)(x-h)^{n}}{n!}$$

La serie de Taylor es:

$$\mathbf{f_{(x)}} = \ln x = 0 + \frac{1(x-h)^{1}}{1!} - \frac{1(x-h)^{2}}{2!} + \frac{1(x-h)^{3}}{3!} - \frac{1(x+h)^{4}}{4!}$$

APLICACION: Serie de Mc Laurin

La fórmula de **Euler: $e^{i\pi}+1=0$** **[0]** es una ecuación que relaciona a los números trascendentes (e), los imaginarios (i), los irracionales (π), los reales, los negativos y la unidad (-1) u el cero.

Para deducir esta ecuación aplicamos la **series de McLaurin**. Para ello,

- Se tiene que: $$e^{ix}=\frac{e^{io}.x^0}{0!}+\frac{ie^{i0}.x^1}{1!}+\frac{ie^{i0}.x^2}{2!}+\frac{ie^{i0}.x^3}{3!}+\frac{ie^{i0}.x^4}{4!}+\frac{ie^{i0}.x^5}{5!}+.....$$
- Simplificado: $e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}+\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+...$ **[1]**

En esta serie vemos términos del desarrollo de Mc Laurin para las series del seno y coseno:

- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+.....$ **[2]**
- $sen(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+.....$ **[3]**

Como las partes reales de **[1]**, son términos de las series de coseno **[2]** y las partes imaginarias son las series del seno **[3]** multiplicadas por i.

Luego: $e^{ix}=\mathrm{Cos}(x)+i.\mathrm{Sen}(x)$

Como: $e^{i\pi}+1=0$, resulta: $e^{i\pi}=\mathrm{Cos}(\pi)+i.\mathrm{Sen}(\pi)=-1$

FUNCION PAR e IMPAR

Una función $f_{(x)}$ es

- **Impar** si: $f_{(-x)} = - f_{(x)}$ → Ejemplo: x^3, x^5 , $- 3 x^3$, $2x$
- **Par** si: $f_{(-x)} = f_{(x)}$ → Ejemplo: x^4, $2x^6$, **Cos x**, $e^x + e^{-x}$

FUNCION PERIODICA

La función $f_{(x)}$ es **periodica** o tiene un periodo **T**, si para todo **x** resulta $f_{(x+T)} = f_{(x)}$ donde **T** es constante.

Ejemplo: La función **f(x) = Sen x** es periódica y tiene periodos 2π, 4π, 6π,....

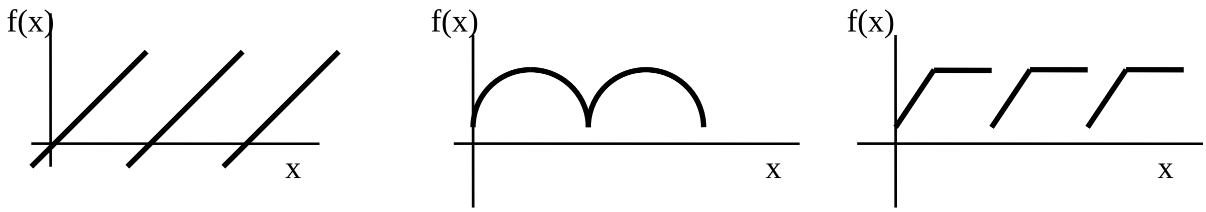
El menor valor de **T>0** es **periodo mínimo** o periodo de $f_{(x)}$

Porque **Sen(x+2π) = Sen(x+4 π) = Sen(x+6π) = Sen x**

El menor valor **2 π** es **periodo mínimo** o **periodo** de **Sen x**

Ejemplo: El periodo de **Sen nx** o de **Cos nx** para **n** entero positivo, es: **2 π /n**

Ejemplo: Funciones periódicas



FUNCION TRIGONOMÉTRICA

La función $f_{(x)}$ es trigonométrica cuando tiene:

- Formato: $f_{(x)} = \frac{1}{2} a_o + a_1 Cos\alpha + b_1 Sen\alpha + a_2 Cos2\alpha + b_2 Sen2\alpha + \ldots + a_n Cosn\alpha + b_n Senn\alpha +$
- Coeficientes a_o, a_n, b_n constantes

La serie trigonométrica se aplica a funciones periódicas, si cumple la condición: **f(x) = f(x+p)**, y el intervalo del período puede presentar un número finito de discontinuidades ordinarias.

SERIE DE FOURIER

Desarrollada por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, para series infinitas que convergen puntualmente a una función continua y periódica, que permita su descomposición en una suma infinitesimal de funciones senoidales simples.

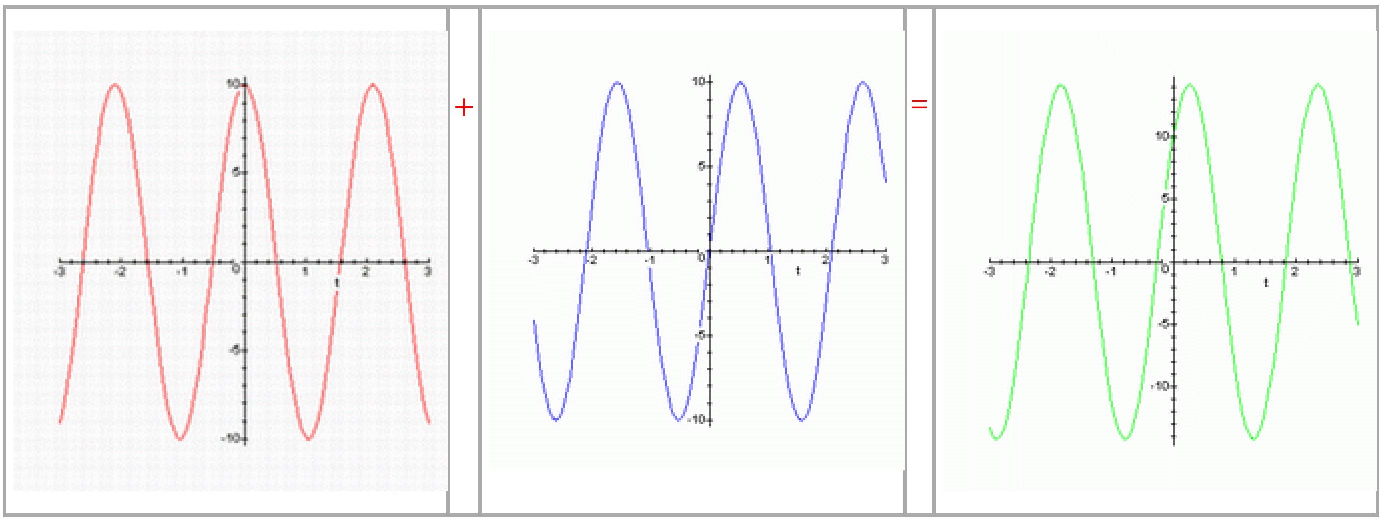
La serie de Fourier para función periódica $f_{(x)}$, **de periodo 2L, en intervalo (-L, L) y** $f_{(x+2L)} = f_{(x)}$, se define como:

$$f_{(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, \text{Cos} \frac{n\pi . x}{L} + b_n \, \text{Sen} \frac{n\pi . x}{L} \right)$$

Donde:
a_n y b_n para: **n = 1, 2, 3,....**

son los **coeficientes de Fourier** de la función $y_{(x)}$, que se puede representar como la suma:

- $a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \; \text{Cos} \frac{n\pi . x}{L} . dx$
- $b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \; \text{Sen} \frac{n\pi . x}{L} . dx$



Demostración: La función $f_{(x)}$ de período 2π en el intervalo $[-\pi, \pi]$, es periódica si $f(x) = f(x + 2\pi)$

Calculo del	Proceso
Coeficiente: a_o	$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}\,\text{Cos}nx.dx$ para $n = 0 \to \text{Cos } 0 = 1 \to a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx$
Coeficiente: a_n	Reemplazo: $f_{(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi.x}{L} + b_n sen\frac{n\pi.x}{L}\right)$ en $\to a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}\text{Cos}nx.dx$ Resulta: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi.x}{L} + b_n sen\frac{n\pi.x}{L}\right)\right]\text{Cos}n\,x.dx$ Separo: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,\text{Cos}n\,x.dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi.x}{L} + b_n sen\frac{n\pi.x}{L}\right)\text{Cos}nx.dx$
Termino: $a_o/2$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,\text{Cos}nx\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot\frac{sennx}{n}\Big\rvert_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}[\text{Sen } n\pi - \text{Sen}(-n\pi)] = \frac{1}{n}[\text{Sen } n\pi + \text{Sen}n\pi] = \frac{2}{n}\,\text{Sen}n\pi$ Para **n** par: $\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\text{Cos}n\,x.dx = 0$ y para **n** impar: $\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\text{Cos}n\,x.dx = 0$
Termino: a_n Cos nx	$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi.x}{L} + b_n sen\frac{n\pi.x}{L}\right)\text{Cos}n\,x.dx$, donde si: $n_1 \neq n_2$: $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos n_1 x\cdot\cos n_2 x)\cdot dx = 0$ $n_1 = n_2$: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\cdot dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{sen2\cdot nx}{4\cdot n}\right)\Big\rvert_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{sen2\cdot n\pi}{4\cdot n} + \frac{\pi}{2} + \frac{sen2\cdot n\pi}{4\cdot n} = \pi + \frac{2\cdot sen2\cdot n\pi}{4\cdot n}$ Para **n** par o impar, el coeficiente es **0**, por lo tanto: $a_n\text{Cos } nx = \pi\ a_n$
Termino: b_n Sen nx	$\int_{-\pi}^{\pi} b_n\,\text{Sen}nx.\text{Cos}nx\,dx = \frac{sen^2 nx}{2\cdot n}\Big\rvert_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\cdot n}\underbrace{\left[sen^2(n\pi) - sen^2(-n\pi)\right]}_{=0} = \frac{1}{2\cdot n}.0 = 0$
Reemplazando: $a_o/2 = 0$, a_nSen nx = 0 a_nCos nx = $\pi\ a_n$	$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx = 0 + \pi\cdot a_n + 0 = a_n\cdot\pi \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx = a_n\cdot\pi$ Finalmente: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Cos}nx dx$. Por igual criterio: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Sen}nx dx$

ANALÍTICAMENTE:

La función de período 2π, en forma de una serie de senos y cosenos, tiene en cuenta que:

- $\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = \pi, \forall n \in N$
- $\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = 0\ \forall n \in N$
- $\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx = 0, \forall n, m \in N(n \neq m)$
- $\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0, \forall n, m \in N$

Demostración:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2nx))dx = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\operatorname{sen}(2nx)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n-m)x)-\cos((n+m)x))dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\operatorname{sen}((n-m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+m}\operatorname{sen}((n+m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}((n-m)x)+\operatorname{sen}((n+m)x)dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{-1}{n-m}\cos((n-m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\frac{-1}{n+m}\cos((n+m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

Para la función de periodo 2π, la serie de fourier es: $SF(f) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx))$

Donde a_0, a_n, b_n son los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$$

Demostración: Si, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx))$. Integrando en $[-\pi,\pi]$:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{a_0}{2}dx + 0 = \dfrac{a_0}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi$ Si multiplicamos por $\cos(mx)$ e integramos en el mismo intervalo:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 + \sum_{n\geq 1}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx)\cos(mx))dx + 0\right] = a_m x$ Haciendo lo mismo con $\operatorname{sen}(mx)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = 0 + \sum_{n\geq 1}\left[0 + \int_{-\pi}^{\pi}(b_n\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx))dx\right] = b_m x$$

Donde los ceros se producen porque las integrales que quedan son impares, y por tanto se anulan.

Las funciones en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y extendamos (hagamos periódicas) en R

Ejemplo: $f(x) = x$ si $x \in (-\pi,\pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(nx)dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

PROPOSICIÓN: Si f(x) es periódica de periodo T, luego será: $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx, \quad \forall a \in R$

Demostración:

Veamos que: $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx, \quad \forall a \in R$

Hacemos $t = x - T$

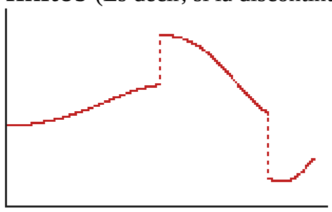
$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_{T-T}^{a-T+T} f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

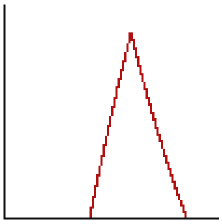
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 g(x)dx + \int_0^T g(x)dx + \int_T^{a+T} g(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Para determinar SF para funciones periodo arbitrario, usamos las formulas de senos y cosenos:

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{T}x\right) \\ \cos\left(\dfrac{n\pi}{T}x\right) \end{matrix}\right\} \text{ son periódicas de periodo } \frac{2T}{n}\text{, por aplicación de la definición de periodicidad.}$$

DEFINICIÓN: Decimos que f es continua a trozos en un intervalo $[a,b]$, si es continua en $[a,b]$, excepto en un nº finito de puntos $c_1,\ldots,c_n$ y existen $f(c_i^-)$ y $f(c_i^+)$, $i = 1,\ldots,n$ (límites laterales) y son finitos (Es decir, si la discontinuidad es de tipo finito.)



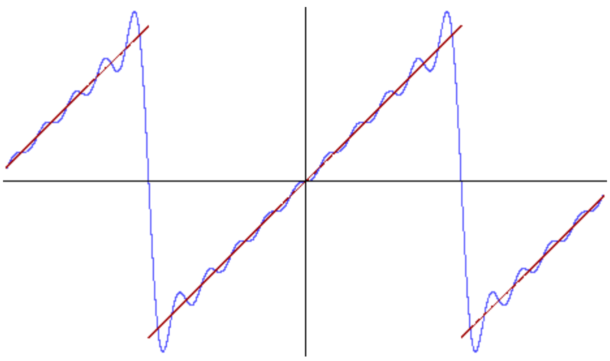


Análogamente se define una función derivable a trozos, siendo además distintas las derivadas laterales(pues sino sería derivable en el punto.):

TEOREMA DE DIRICHLET:

Formulado por el matemático Johann Dirichlet, trata sobre la distribución de los números primos en N, fue conjeturado por Gauss y finalmente demostrado en 1837 por Dirichlet, nombre por el que actualmente se le conoce.

Como el primer teorema de convergencia de series de Fourier, debido a Dirichlet, se refiere a funciones monótonas a trozos:



- Una función monótona y acotada en un intervalo [a, b] es integrable y tiene límites laterales finitos en cada punto.
- Si estos límites no coinciden la función tendrá una discontinuidad con un salto finito.

- La suma de los saltos no puede ser mayor que la diferencia de los valores de la función en los extremos del intervalo, de modo que el conjunto de discontinuidades con salto mayor que 1/n es finito y, por tanto, el conjunto de discontinuidades es a lo más numerable.

Propiedades ciertas para funciones monótona a trozos, es decir, aquella que es monótona en una cantidad finita de intervalos que unidos dan el intervalo original.

Dirichlet enuncia:
Sea a,b $\in$ N | mcd(a,b) = 1, entonces la progresión aritmética: $\mathbf{a_n = a+b.n}$ contiene infinitos números primos.

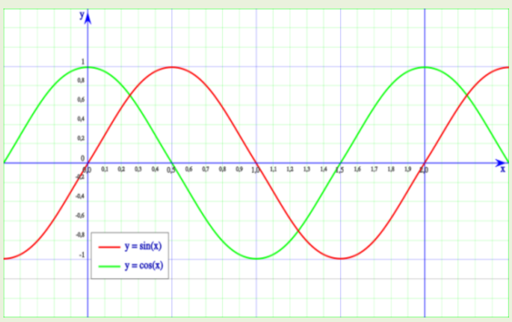
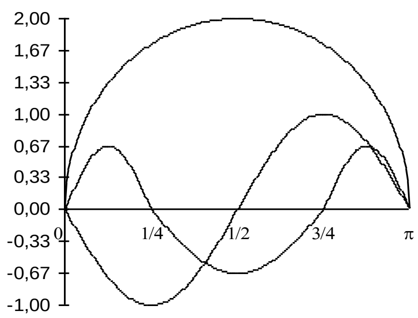
Ejemplo: Existen infinitos primos que terminen en 7.

- Los números que terminan en 7 forman una progresión aritmética: 7, 17, 27, 37, ...; es decir, una sucesión de números obtenidos sumando una cantidad fija (10 en este caso) al anterior.
- Los números 10 (la cantidad que se va sumando) y 7 (el primer término de la sucesión) son primos entre sí, es decir, su máximo común divisor es 1.

Como plantea el teorema, en dicha progresión aritmética hay una cantidad infinita de números primos.

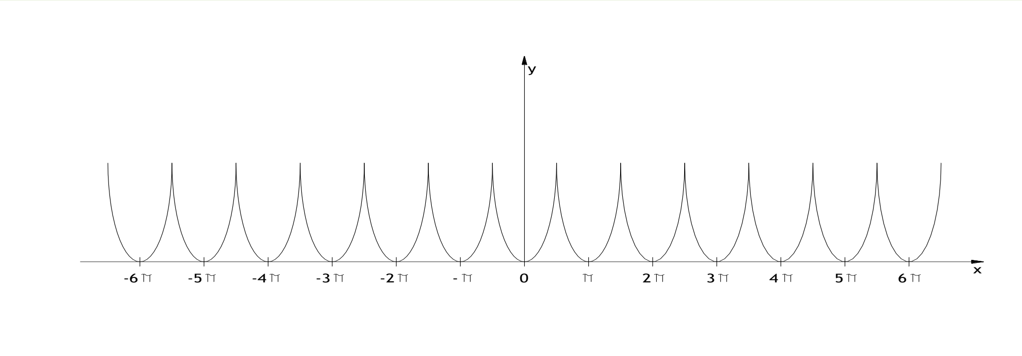
Si **f** es periódica y derivable a trozos, su SF converge en el punto $\mathbf{x_0}$ a $\frac{1}{2}\left[f(x_0^-)+f(x_0^+)\right]$.
Por tanto, si **f** es continua en $\mathbf{x_0}$, converge a $\mathbf{x_0}$.

Ejemplo 1: **Serie de Fourier** para: $f_{(x)} = x$ y $-\pi \leq x \leq \pi$

Cálculo de:	Desarrollo
Coeficiente a_o: Reemplazo $f_{(x)}=x$ en: $a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}.dx$	$a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x.dx = \frac{1}{\pi}.\frac{x^2}{2}\Big\vert_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\cdot\pi} - \frac{\pi^2}{2\cdot\pi} = 0$ $a_o = 0$
Coeficiente a_n: Reemplazo $f_{(x)} = x$ en $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}\mathrm{Cos}\ nx.dx$	$a_n=$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\cdot sen nx}{n}\right]\Big\vert_{-\pi}^{\pi}$ $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos n\pi}{n^2} + \frac{\pi\cdot sen n\pi}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n^2} - \frac{-\pi\cdot sen(-n\pi)}{n}\right] =$ $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos n\pi}{n^2} + \frac{\pi\cdot sen n\pi}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{\pi\cdot sen(n\pi)}{n}\right] = 0$
Coeficiente b_n: Reemplazo $f_{(x)} = x$ en $b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}\mathrm{Sen}\ nx.dx$ $b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2} - \frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$	$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot sen nx\cdot dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{sen nx}{n^2} - \frac{x\cdot\cos nx}{n}\right]\Big\vert_{-\pi}^{\pi}$ $b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2} - \frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n} + \frac{sen n\pi}{n^2} - \frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$ $b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{2\cdot sen n\pi}{n^2} - \frac{2\cdot\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2} - \frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$ • Si **n** es Par: **Cos 2π = 1**, → $b_n = \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{\pi}{n}\right] = -\frac{2}{n}$ • Si **n** es Impar: **Cos π = -1**, → $b_n = \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\pi}{n}\right] = \frac{2}{n}$
Reemplazo: $a_o = 0$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}$ y $b_n = \frac{2}{n}$ en →	$f_{(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\mathrm{Cos}nx + b_n\mathrm{Sen}nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\mathrm{Sen}nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\mathrm{Sen}nx$
La sumatoria es la **serie de Fourier** de sumas algebraicas de funciones senoidales →	$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}Sen.nx = 2\cdot senx - 1\cdot sen2x + \frac{2}{3}\cdot sen3x - \frac{1}{2}\cdot sen4x + \cdots$
Recordando que	La grafica entre **(0, π)** es:
	

Ejemplo 2: **Serie de Fourier** para: $f_{(x)} = x^2$ para y $-\pi \le x \le \pi$

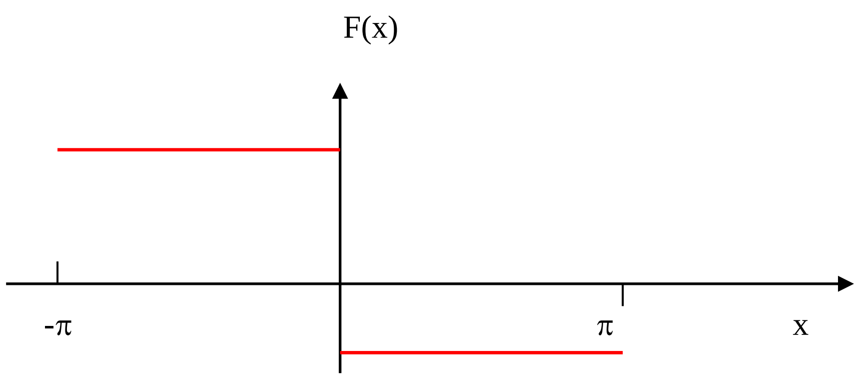
Cálculo de:	Desarrollo
Coeficiente a_o: Reemplazo $f_{(x)} = x^2$ en: $a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}.dx$	$a_o = 1/\pi \int x^2 dx = (1/3\pi)x^3 \Big| = 2\pi^2/3$ $a_o = 2\pi^2/3$
Coeficiente a_n: Reemplazo $f_{(x)} = x$ en $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} Cos\ nx.dx$	$a_n = 1/\pi \int x^2\cos(nx)dx = -2/\pi n \left[x\cos(nx)/x \Big| + 1/n\int\cos(nx)dx\right]$ $a_n = 4/\pi n^2\ (\pi \cos n\pi) = 4/n^2$; n=2 y $a_n = 4/\pi n^2\ (\pi\cos n\pi)$ $a_n = -4/n^2$; $n \neq 2$
Coeficiente b_n: Reemplazo $f_{(x)} = x$ en $b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} Sen\ nx.dx$	$b_n = 1/\pi \int x^2 sen(nx)dx = 0$ $b_n = 0$
Reemplazo: $a_o = 2\pi^2/3$, $a_n = -4/n^2$, $b_n = 0$ en →	$f_{(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n Cosnx + b_n Sennx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sennx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} Sennx$
La sumatoria es la **serie de Fourier** de sumas algebraicas de funciones senoidales →	$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 = (\pi^2/3) - 4\left((\cos x) - (\cos 2x/4) + (\cos 3x/27) - \right.$
	La grafica entre $(0, \pi)$ es:



Ejemplo 3: **Serie de Fourier** para:

- $f_{(x)} = 2$ para y $-\pi < x > 0$
- $f_{(x)} = -1$ para y $0 < x > \pi$

Cálculo de:	Desarrollo
Coeficiente a_o: Reemplazo $f_{(x)}=2$ y -1 en: $a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}.dx$	$a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\int_{-\pi}^{0}2dx+\int_{0}^{\pi}-1dx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot[2(0-(-\pi)-1(\pi-0))] = \frac{1}{\pi}\cdot\pi$ $a_o = 1$
Coeficiente a_n: Reemplazo $f_{(x)}=2$ y $f_{(x)}=-1$ en $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}Cos\, nx.dx$	$a_n=1/\pi\left[\int_{-\pi}^{0}2Cosnxdx+\int_{0}^{\pi}-1Cosnxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[2\frac{Sennx}{n}\Big\vert_{-\pi}^{0}+(-1)\frac{Sennx}{n}\Big\vert_{0}^{\pi}\right]=$ $a_n=\frac{1}{\pi}\left[\left(2(0-\frac{Sen(-1)nx}{n}\right)-\left(\frac{Sennx}{n}-0\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\left(2\frac{Sen(-1)nx}{n}\right)-\left(\frac{Sennx}{n}\right)\right]=0$ $a_n = 0$
Coeficiente b_n: Reemplazo $f_{(x)}=2$ y $f_{(x)}=-1$ en $b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}Sen\, nx.dx$	$b_n= 1/\pi\left[\int_{-\pi}^{0}2Sennxdx+\int_{0}^{\pi}-1Sennxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-2\frac{Cosnx}{n}\Big\vert_{-\pi}^{0}+\frac{Cosnx}{n}\Big\vert_{0}^{\pi}\right]$ $b_n=\frac{1}{\pi n}[(-2+2Cos(-n\pi))+(Cosn\pi-1)]=\frac{1}{n\pi}[-3+2(-1)^n+(-1)^n]$ $b_n = \frac{3}{n\pi}[-1+(-1)^n]$
Reemplazo: $a_o = 1$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{3}{n\pi}[-1+(-1)^n]$ en →	$f_{(x)}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nCosnx+b_nSennx)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nSennx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}Sennx$
La sumatoria es la **serie de Fourier** de sumas algebraicas de funciones senoidales →	$f_{(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}x^2 =$ $\frac{1}{2}+\left[\left(\frac{3}{\pi}\times(-2)\times SENX\right)+\left(\frac{3}{2\pi}\times(0)\times SEN2X\right)+\left(\frac{1}{\pi}\times(-2)\times SEN3X\right)+.......\right]$
	La grafica entre $(-\pi, \pi)$ es:



Ejemplo 4: **Serie de Fourier** para: $f_{(x)} = 4x$ para y $-\pi \le x \le \pi$

- Calculo de los coeficientes a_n:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cdot dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\left(\frac{\pi^2}{\pi}-\frac{\pi^2}{\pi}\right) \quad a_o = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cdot\cos nx\cdot dx = \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{x\cdot sen nx}{n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}+\frac{\pi\cdot sen n\pi}{n}-\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}-\frac{-\pi\cdot sen(-n\pi)}{n}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}+\frac{\pi\cdot sen n\pi}{n}-\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-\frac{\pi\cdot sen(n\pi)}{n}\right] = 0$$

- Calculo de los coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cdot sen nx\cdot dx = \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{sen nx}{n^2}-\frac{x\cdot\cos nx}{n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2}-\frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}+\frac{sen n\pi}{n^2}-\frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$$

$$b_n = \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{2.sen n\pi}{n^2}-\frac{2.\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right] = \frac{8}{\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2}-\frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$$

Si **n** es:

- Par $\Rightarrow \cos 2\pi = 1 \Rightarrow b_n = \frac{8}{\pi}\left[0-\frac{\pi}{n}\right] = -\frac{8}{n}$
- Impar $\Rightarrow \cos\pi = -1 \Rightarrow b_n = \frac{8}{\pi}\left[0+\frac{\pi}{n}\right] = \frac{8}{n}$

Armando la función: $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot sen nx) = 0+\sum_{n=1}^{\infty}(0+b_n\cdot sen nx)$

$$n=1\Rightarrow\frac{8}{1}.\text{sen}1.x \quad n=2\Rightarrow\frac{8}{2}(-\text{sen}2.x) \quad n=3\Rightarrow\frac{8}{3}.\text{sen}3.x \quad n=4\Rightarrow\frac{8}{4}.(-\text{sen}4.x)$$

$$n=5\Rightarrow\frac{8}{5}.\text{sen}5.x \quad n=6\Rightarrow\frac{8}{6}.(-\text{sen}6.x)$$

$$x = 8\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}\,2x + \frac{8}{3}\text{sen}\,3x - 2\,\text{sen}\,4x + \frac{8}{5}\text{sen}\,5x - \frac{4}{3}\text{sen}\,6x$$

APLICACIÓN: TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN

Un medio físico se convierte en un canal si se acopla en un transmisor extremo, un receptor en el otro y para evitar el excesivo deterioro de la señal transmitida, unos repetidores intermedios. Aunque el canal, tiene asociado un sentido unidireccional de transmisión, no excluye sin embargo la existencia de ambos sentidos y hasta pueden coexistir dos o más canales sobre un mismo soporte físico.

Estudiaremos los fenómenos físicos que posibilitan la transmisión de información desde una estación emisora, hasta una estación receptora , así como los medios físicos más empleados en la actualidad para el transporte de la señal portadora de la información. Para ello, el análisis de Fourier plantea que una función $g_{(t)}$ de periodo **T** y continua en el tiempo, puede representarse como suma de un número teóricamente infinito de senos y cosenos:

$$g_{(t)} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{Sen}.n2\pi n.f_t + b_n \text{Cos}.n2\pi n.f_t) \qquad \text{siendo } f_t = 1/T$$

Para cada valor de **n (n=1,2,3,...)** obtenemos un ***armónico*** de la señal siendo el armónico fundamental o principal, el que corresponde al valor de **n=1** y frecuencia **f**. La frecuencia del resto de armónicos es múltiplo de la frecuencia principal (nf). Los ***coeficientes de Fourier*** a_n y b_n que corresponden a las amplitudes de las funciones seno y coseno del n-ésimo armónico.

Descomponemos la función $g_{(t)}$ en suma de una serie infinita de armónicos (*serie de Fourier*), así, cuando mayor sea **n**, más cerca estaremos de la señal original. Como en la realidad los coeficientes de Fourier (a_n, b_n) decaen rápidamente al aumentar **n**, bastará un número reducido de armónicos para que la señal sea reconocible. Además, la señal, se va a poder descomponer para transmitirla en una serie de armónicos (funciones senos y cosenos) con *frecuencias distintas*, y todas ellas múltiplos de la frecuencia principal.

Cuando transmitimos por un canal de comunicación una señal sufre una pérdida de energía y las amplitudes de cada uno de sus armónicos disminuyen. Si todos los coeficientes a_n, b_n fueran disminuidos igualmente, la señal estaría disminuida en amplitud, pero no **distorsionada**, la señal estaría **atenuada**.

Cada medio de transmisión posee una *respuesta en frecuencias* característica, de forma que la señal que se transmite por él, sufre distintas atenuaciones en función de la frecuencia. Un medio tendrá solamente un rango de frecuencias, entre las cuales, cualquier señal con una frecuencia comprendida dentro de este rango que se transmita por él, sufrirá la misma atenuación en los armónicos que se encuentren dentro del rango de frecuencias del canal.

El *ancho de banda* de un canal es el rango de frecuencias entre las cuales los armónicos sufren la misma atenuación durante la transmisión, de forma que se puede aplicar la misma escala de amplificación para ese rango de frecuencias sin que se produzca una distorsión. Así, el ancho de banda es la diferencia entre la frecuencia superior e inferior que se puede transmitir con atenuación pero sin distorsión por un medio físico empleado como canal de comunicación.

Ningún medio de transmisión puede transportar señales sin causar pérdida de energía en la señal transportada y cada armónico de la señal tiene asociado el valor de energía:

$$d_n^2 = \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Es proporcional a la energía transmitida a la frecuencia o armónico correspondiente y proporciona una medida de energía de señal que corresponde al n-ésimo armónico. El medio atenua de forma desigual las amplitudes de los diferentes armónicos de la señal transportada, dando lugar a que la pérdida de energía no sea proporcional para cada armónico, así, la señal va a ser distorsionada.

Las amplitudes se transmiten sin degradación o con igual factor de atenuación para un rango de frecuencias: $f = 0$ hasta $f = f_c$, siendo f_c la frecuencia de corte característica del medio, medida en ciclos/segundo o Hertzios (Hz). Todas las frecuencias superiores a dicha frecuencia de corte sufren fuertes atenuaciones.

El rango de frecuencias denominado ancho de banda, es una propiedad del medio de transmisión, donde es posible limitar el ancho de banda colocando filtros que disminuyan el rango de frecuencias que puede transportar, pero no es posible ampliarlo, ya que depende intrínsecamente de las propiedades físicas del medio. Así, tal ancho de banda de la señal que va a ser transmitida por dicho medio o anchura espectral de la señal, es la banda de frecuencias que contiene la mayor parte de la energía de la señal y se considera despreciable la energía contenida en las frecuencias fuera de este margen.

Para la velocidad de transmisión de datos por un canal, supondremos que se realiza a través de algún tipo de cable eléctrico, aunque todos los conceptos que se verán a continuación pueden extenderse a cualquier medio físico. La información puede ser transmitida por un cable variando alguna propiedad de la corriente eléctrica que circula por él, por ejemplo su voltaje. Para transmitir información digital, nteresa representar los estados lógicos 0 y 1 de una forma sencilla y fácilmente reconocible, por ejemplo se podría emplear un nivel de tensión de 0 voltios para representar el estado lógico 0, y 5 voltios para representar el estado lógico 1.

Estados significativos de una línea son niveles de tensión que representen información distintas, luego, si disponemos de dos niveles de tensión para representar la información, entonces sólo podremos señalizar un bit en cada estado. Si utilizáramos cuatro niveles de tensión, podemos agrupar la información a transmitir de modo que cada nivel de tensión represente dos bits, luego transmitir dos bits de información por cada intervalo significativo de tiempo.

Velocidad de modulación (en baudios) es el número de veces por segundo que la señal cambia su valor en la línea o medio de transmisión. Como el número de baudios determina la cantidad de cambios de estado por segundo que se producen en una transmisión, cuantos más estados, más cantidad de bits por segundo se podrán transmitir.
Para el intervalo de tiempo T consumido por un estado, su expresión matemática es: $\mathbf{V_{(m)}} = 1/T$

Velocidad de transmisión (bps: bits por segundo) Es el número de bits transmitidos por segundo. Si el número de estados posibles de la línea de comunicación es n, a cada estado le corresponderán $\log_2 n$ bits de información, por lo tanto la velocidad de transmisión será : $\mathbf{V_{(t)}} = 1/T.(\ \mathbf{log_2} n) = \mathbf{V_{(m)}}\ .(\ \mathbf{log_2} n)$

Con dos estados significativos (n=2), el número de baudios coincidirá con la cantidad de bits por segundo que se pueden transmitir por la línea.

El tiempo para transmitir un carácter depende del método de codificación y de la velocidad de transmisión; por ejemplo si tenemos caracteres codificados con 8 bits, empleando dos estados significativos y que la velocidad de transmisión es v bps. El tiempo necesario para enviar el carácter es: $\mathbf{t_{(caracter)}} = 8.\ \mathbf{T_{bit}} = 8.[T/(\ \mathbf{log_2} n)] = 8.[T/(\ \mathbf{1})] = 8 / v$

Para transmitir un conjunto de caracteres cada carácter puede repetirse indefinidamente a partir del último bit, por lo tanto el tiempo $t_{caracter}$ podría concebirse como el periodo de la señal. En tal caso, la frecuencia del primer armónico de la serie de Fourier será: $\mathbf{f_{(1)}} = 1/\ \mathbf{t_{(caracter)}} = v/8$

Si para enviar la señal se emplea una línea telefónica común, cuyo ancho de banda es aproximadamente 3 KHz, limitaremos las frecuencias más altas que pueden pasar a través del medio, de modo que la frecuencia del último armónico que podrá transmitirse sin distorsión será menor o igual a 3000 Hz : $\mathbf{f_{(N)}} =< 300$ Hz

Como la frecuencia del N-ésimo armónico es N veces la frecuencia del primer armónico: $\mathbf{f_{(N)}} = N.\ \mathbf{f_{(1)}}$, deducimos que el número máximo de armónicos a transmitir por el medio físico será: $N = \mathbf{f_{(N)}} / \mathbf{f_{(1)}} =< 300/[(v/8)] = 24.000 / v$

La cantidad de armónicos N para una velocidad de transmisión v y un ancho de banda de 3KHz corresponde a la parte entera de la expresión anterior, luego, si se aumenta la velocidad de transmisión se reduce el número de armónicos que pueden pasar a través del canal sin distorsión.

Considerando la eficiencia de la *velocidad de transferencia de datos*, podemos considerar que es la cantidad de información útil que puede transmitirse por unidad de tiempo :

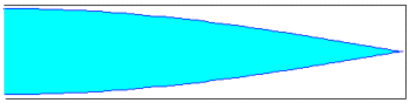
$$\mathbf{V_{td}} = \text{NumeroBitsInformacionUtil} / \text{TiempoParaTrasmitirTodosBits}$$

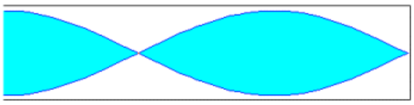
Ejemplo: Ondas sonoras producidas por un tubo cerrado

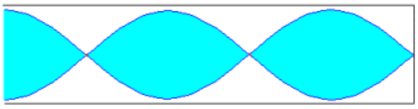
Las ondas sonoras producidas por los tubos cerrados dependen de la longitud del tubo emisor

.$\lambda = V.T = 4.L$ donde
λ Longitud de onda, T: Período, V: Velocidad de propagación del sonido, L: Longitud del tubo emisor.

Tubos cerrados







Como los movimientos vibratorios que originan los sonidos que percibimos son compuestos, los movimientos vibratorios de los puntos de un cuerpo que emite sonido no se pueden representar por una sinusoide, ni responde a la ecuación del movimiento armónico simple.

El Teorema de Fourier establece que un movimiento vibratorio cualquiera de periodo T puede siempre expresarse, como una suma de movimientos armónicos simples de periodos

T, T/2 , T/3 , T/4 , T/5 ... , ...

Ejemplo: Para producir el sonido usamos un tubo de ensayo de 14.8 cm de longitud. Por análisis de Fourier

$$f(x)=\frac{4x}{340} \quad ; \quad (-\pi,\pi)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4x}{340}\cdot dx=\frac{4}{340\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{340}\left(\frac{\pi^2}{\pi}-\frac{\pi^2}{\pi}\right)=0\Rightarrow a_0=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4x}{340}\cdot \cos nx\cdot dx=\frac{4}{340\pi}\cdot\left[\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{x\cdot \operatorname{sen} nx}{n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$a_n=\frac{4}{340\pi}\cdot\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}+\frac{\pi\cdot sen n\pi}{n}-\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}-\frac{-\pi\cdot sen(-n\pi)}{n}\right]=\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}+\frac{\pi\cdot sen n\pi}{n}-\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-\frac{\pi\cdot sen(n\pi)}{n}\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4x}{340}\cdot sen nx\cdot dx=\frac{4}{340\pi}\cdot\left[\frac{sen nx}{n^2}-\frac{x\cdot \cos nx}{n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{4}{340\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2}-\frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}+\frac{sen n\pi}{n^2}-\frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$$

$$b_n=\frac{4}{340\pi}\cdot\left[\frac{2\cdot sen n\pi}{n^2}-\frac{2\cdot\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]=\frac{8}{340\pi}\cdot\left[\frac{sen n\pi}{n^2}-\frac{\pi\cdot\cos n\pi}{n}\right]$$

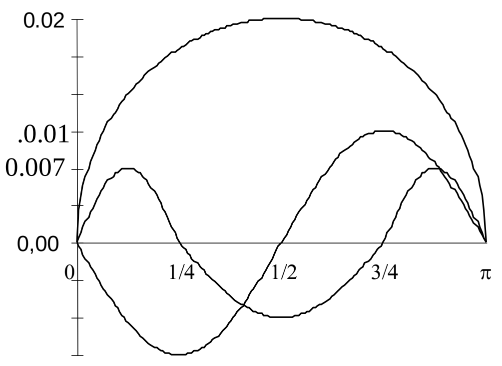
si “n” es: par $\Rightarrow \cos 2\pi=1\Rightarrow b_n=\frac{8}{340\pi}\left[0-\frac{\pi}{n}\right]=-\frac{8}{340n}$

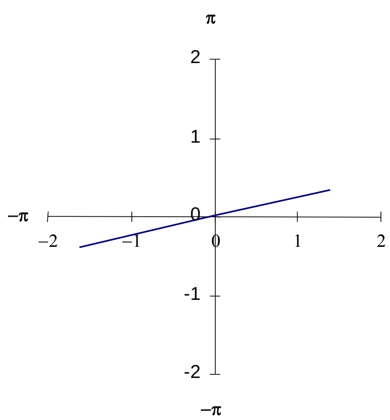
impar $\Rightarrow \cos\pi=-1\Rightarrow b_n=\frac{8}{340\pi}\left[0+\frac{\pi}{n}\right]=\frac{8}{340n}$

Luego: $b_n=-\frac{8}{340n}\to\forall\ n\ \to$ par. $b_n=\frac{8}{340n}\to\forall\ n\ \to$ impar.

Armamos la función: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot \operatorname{sen} nx)$ $x=\frac{8}{340n}\cdot \operatorname{sen} nx$; $\frac{8}{340n}=b_n$

Realizando la sumatoria: $x=\frac{8}{340}\cdot \operatorname{sen} x-\frac{4}{340}\cdot \operatorname{sen} 2x+\frac{8}{1020}\cdot \operatorname{sen} 3x-\frac{2}{340}\cdot \operatorname{sen} 4x+\cdots$





Para concluir:

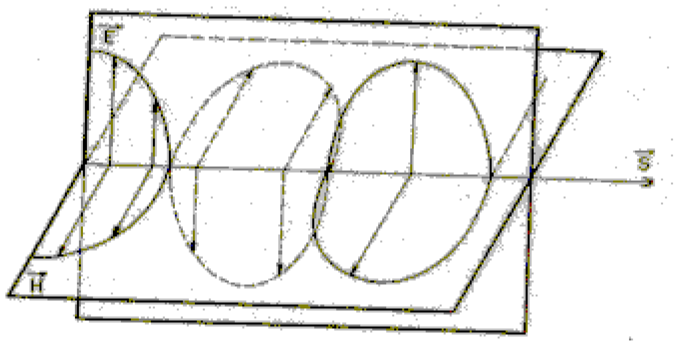
$$T=\frac{\lambda}{V}=\frac{4l}{V}=\frac{4\times 0.148}{340}=0.0017$$

Por lo tanto las ondas producidas por tubos cerrados dependen de la longitud del tubo emisor.

APLICACIÓN: FIBRAS ÓPTICAS

Una onda electromagnética es transversal, porque la perturbación de los campos eléctrico y magnético es perpendicular a la dirección de propagación.
Si

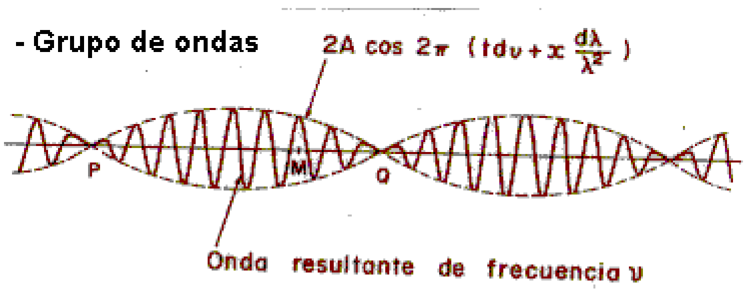
- "s" es la dirección de propagación,
- "E" es el vector campo eléctrico, y
- "H" es el vector de campo magnético,
- El plano E-s es el *plano de vibración*, y
- El plano H-s es el *plano de polarización*.

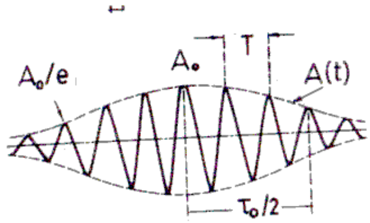


- Onda transversal electromagnética

Si se superponen ondas de distintas frecuencias, con la misma dirección de propagación, se forman lo que se denomina ***grupos de ondas***, que son la resultante de las interferencias de todas las ondas que forman el grupo.

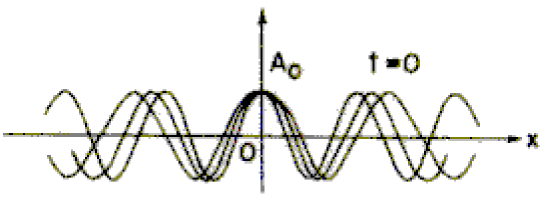
- Grupo de ondas



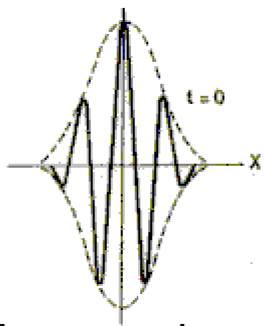


- Grupo de ondas

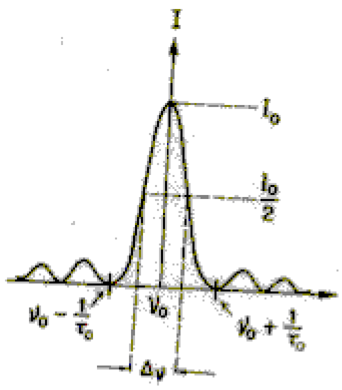
PAQUETES DE ONDAS: Grupo de ondas con distribución de frecuencias del tipo gausiano, centrado en una ***frecuencia central*** cuya amplitud es máxima, y que las amplitudes relativas de ondas que forman el paquete disminuyen muy rápidamente a medida que la frecuencia se aleja de la frecuencia central. Un paquete de ondas, define un único pulso, que constituye la ***señal óptica***.
La longitud del pulso, depende de su ***composición espectral*** (espectro de frecuencias de las ondas que forman el pulso): Un espectro de pocas frecuencias, dará un pulso ancho, y uno con muchas frecuencias (espectros continuos) dará un pulso estrecho y definido.



- Ondas que forman el paquete



- Paquete resultante

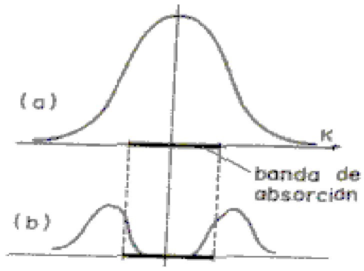


- Anchura espectral

Longitud de coherencia (L_0) es la longitud del pulso, y ***tiempo de coherencia*** (t_0=c / L_0) es tiempo que tarda el pulso en pasar por un punto. Anchura espectral de un pulso viene dada por la expresión ($\Delta\nu = 1/ t_0$).

Pérdidas de energía (absorción y difusión)**:** Cuando una onda electromagnética atraviesa la materia, su campo eléctrico **E** actúa sobre las cargas (átomos) que la forman. La energía perdida es por el movimiento que induce la onda en las partículas, y se pierde en forma de "rozamiento", que provoca calor en el medio. A este fenómeno se le denomina ***absorción***, y es el responsable de la ***atenuación*** que sufre la señal al propagarse.

Cuando la onda induzca movimientos oscilatorios en las cargas, que entonces radiarán con la misma frecuencia que la luz incidente, a costa de su energía, pero en todas las direcciones, se produce el fenómeno de ***difusión***, y causa la ***distorsión*** de la señal propagada, ya que es selectiva respecto a la frecuencia de la onda.



- Atenuación de la señal

MODOS DE PROPAGACIÓN: Se propaga por uno de estos dos modos:

- *Modos transversales eléctricos (TE), o*
- *Modos transversales magnéticos (TM).*

FIBRAS ÓPTICAS A LA TELECOMUNICACIÓN:

La información se transmite por pulsos de luz, obtenidos modulando en amplitud un emisor, que puede ser un laser de inyección o un LED, por ejemplo, la comunicación telefónica digital, la señal de voltaje que sale del micrófono, se muestrea a una frecuencia doble de la máxima de la que se tenga que emitir, que convierte cada muestra a un código binario de 8 bits (256 posibles valores diferentes), y se emiten los bits (ceros y unos) en forma de pulsos de luz. Al otro extremo de la fibra, se convierten los pulsos de luz de nuevo a pulsos eléctricos mediante fotodetectores, y se reconstruye la señal analógica de voltaje a partir de los pulsos, llevándola al auricular del receptor.

Como el tiempo entre dos muestreos de señal en el micrófono del emisor, es mayor que el que ocupa la emisión de los pulsos de cada muestra, se pueden unir (multiplexar) varias transmisiones simultáneamente por una misma fibra. Al otro extremo de la fibra, habrá que separar las señales de cada comunicación (demultiplexación).

Las fibras ópticas se pueden clasificar en función del número de líneas que permiten transmitir simultáneamente. Las fibras de órdenes:

- **1 y 2** se usan para conectar a los abonados de la red telefónica con las centrales telefónicas urbanas.
- **3 y 4** se usan para conectarse entre sí las centrales telefónicas urbanas dentro de una misma ciudad.
- **4 y 5** se usan para conectar centrales telefónicas de distintas ciudades.

Nº de Orden	Nº de líneas	V_t (Mbps)
1	30	2
2	120	8
3	480	34
4	1920	140
5	7620	565

VENTAJAS DE LAS FIBRAS ÓPTICAS:

- Su grosor del orden de unas micras, permiten introducir unas 100 en un tubo del mismo grosor que los cables coaxiales de más alta capacidad, lo que las hace unas 1000 veces más capaces que éstos.
- Permiten transmitir por una fibra diferentes longitudes de onda (multiplexación de longitudes de onda), lo que multiplica por miles la capacidad de los cables coaxiales.
- Producen menor atenuación en la señal, por lo que la distancia entre repetidores es bastante mayor (10 – 100 km) que en los cables eléctricos, por lo que las conexiones abonado – central, y entre centrales de la misma ciudad no necesitan repetidor.
- No se ven afectadas por perturbaciones eléctricas o magnéticas como los cables convencionales, ya que la señal propagada es óptica.

DESVENTAJA DE LAS FIBRAS ÓPTICAS:

Debido a que no se pueden reparar, en caso de ser dañadas han de sustituirse.

FOURIER APLICADO A SEÑALES:

La señal S(t) periódica puede descomponerse en suma de sinusoidales según la fórmula:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi nft) + b_n sen(2\pi nft)) \quad [1]$$

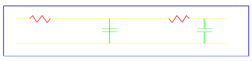
Donde:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(2\pi nft)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)sen(2\pi nft)dt$$

$f = \dfrac{1}{T}$ donde T es el período de la señal S(t) y f es la frecuencia fundamental.

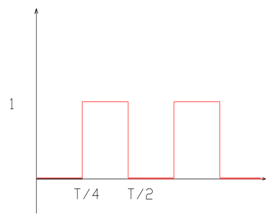
De [1]: a_0 es una constante que se denomina componente de continua de S(t),

EJEMPLO: Muestra la señal de salida de una función escalonada entre 0 y 1, que surge de un “rozamiento” de la señal al circular por el circuito, que surge a causa de la resistencia interna del mismo, del circuito y del intercambio de calor con su medio exterior o recipiente térmico



Por Fourier determinar la salida, en estado estacionario, del circuito, cuando la entrada es una señal periódica que para el 1er período es:

Grafico de la Señal que muestra el período T/4, que se repite por milisegundo



.h(t) = 1 si $\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}$, caso contrario h(t) = 0

Siendo T el período de la señal (T=1ms).

$$an = 2\int_{1/4}^{1/2} \cos(2\pi nft)dt$$

$$u = 2\pi nft$$

$$du / 2\pi nft = dt$$

$$\frac{2}{2\pi nft}\int_{1/4}^{1/2} \cos u du = \frac{1}{\pi nft}(sen 2\pi nft\Big|_{1/4}^{1/2}) = \frac{sen \pi nf}{2\pi nft},$$

de forma similar encontramos el término bn

$$.bn = 2\int_{1/4}^{1/2} sen(2\pi nft)dt = \frac{2}{2\pi nft}\int_{1/4}^{1/2} sen u du = \frac{1}{\pi nft}(-\cos 2\pi nft\Big|_{1/4}^{1/2}) = \frac{-\cos \pi nf}{2\pi nft}$$

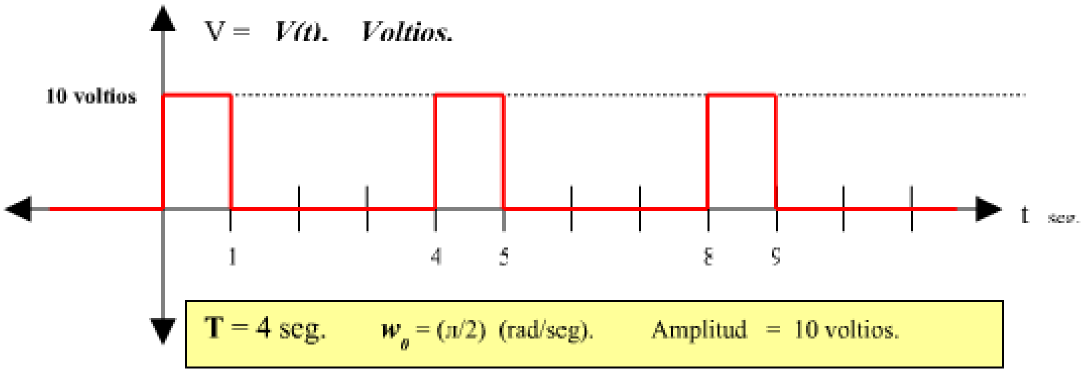
Calcular el término a_0, haciendo n = 0 en an: $a_0 = 1\int_0^{1/2} 1dt = t\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}$

Finalmente calculamos S(t), reemplazando los valores:

$$S(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{sen \pi nf}{2\pi nft}\right)(\cos 2\pi nft) + \left(\frac{-\cos \pi nf}{2\pi nft}\right)(sen 2\pi nft)\right]$$

APLICACION: Calculo del coeficiente de Fourier

La señal periódica **$V_{(t)}$** de un antena, que no tiene ninguna onda de simetría conocida, se dispersa con un amplitud de 10 volts, tiempo 4 seg y frecuencia $W_0=\pi/2$, calcula por serie de fourier la correspondiente función **$V_{(t)}$** hasta **n=1**, el coeficiente de nivel de señal DC y los armónicos del seno y coseno, para ese tiempo.



T = 4 seg. $w_0 = (\pi/2)$ (rad/seg). Amplitud = 10 voltios.

Recordemos que la fórmula generalizada para las SERIES DE FOURIER es:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ [a_n * \mathrm{Cos}(nw_0\, t)] + [b_n * \mathrm{Sen}(nw_0\, t)] \}$$

$w_0 = (\pi/2)$ (rad/seg) = **1.57** (rad/seg).

Calculamos **a_0**:

$$a_0 = \left(\frac{1}{T}\right) * \int_d^{(d+T)} f(t)\, dt = \left(\frac{1}{4}\right) * \int_0^4 V(t)\, dt = \left(\frac{1}{4}\right) * \int_0^4 10\, dt$$

$$a_0 = 0.25 * \left\{ \int_0^1 10\, dt + \int_1^4 0\, dt \right\} = (0.25*10) * \int_0^1 dt = 2.5 * \{ t \}_0^1$$

$$a_0 = 2.5 * \{ 1 - 0 \} = 2.5 * \{ 1 \} = 2.5$$

a_0 = **2.5** voltios. ; **Este es el nivel DC de la señal V (t).**

Calculamos **a_n**:

$$a_1 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \mathrm{Cos}(w_1\, t)\, dt \quad ;$$ Se cumple para la n = 1.

$$a_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \cos(1 * 1.57 * t)\, dt + \int_1^4 0 * \cos(1 * 1.57 * t)\, dt \right\}$$

$$a_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \cos(1.57 * t)\, dt \right\} = 0.5 * 10 * \int_0^1 \cos(1.57 * t)\, dt$$

$$a_1 = 5 * \int_0^1 \cos(1.57 * t)\, dt = 5 * \left\{ \frac{\operatorname{Sen}(1.57 * t)}{1.57} \right\}_0^1 = 3.18 * \left\{ \operatorname{Sen}(1.57 * t) \right\}_0^1$$

$$a_1 = 3.18 * \left\{ \operatorname{Sen}(1.57 * 1) - \operatorname{Sen}(1.57 * 0) \right\} = 3.18$$

$\mathbf{a_1} = \mathbf{3.18}$ voltios. ; **Esta es la amplitud del ARMONICO número 1 en el coseno.**

Calculamos $\mathbf{b_n}$:

$$b_1 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \operatorname{Sen}(w_1 t)\, dt \quad ; \quad \text{Se cumple Para la } n = 1.$$

$$b_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^4 V(t) * \operatorname{Sen}(1 * 1.57 * t)\, dt \right\}$$

$$b_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \operatorname{Sen}(1.57 * t)\, dt + \int_1^4 0 * \operatorname{Sen}(1.57 * t)\, dt \right\}$$

$$b_1 = 0.5 * 10 * \left\{ \int_0^1 \operatorname{Sen}(1.57 * t)\, dt \right\} = 5 * \left\{ \frac{-\cos(1.57 * t)}{1.57} \right\}_0^1$$

$$b_1 = -3.18 * \left\{ \cos(1.57 * 1) - \cos(1.57 * 0) \right\} = -3.18 * \{ 0 - 1 \}$$

$\mathbf{b_1} = \mathbf{3.18}$ voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 1 en el Seno.**

Todos estos cálculos nos llevaron a encontrar los valores de los coeficientes de las series de fourier, ahora a0, an y bn son conocidas hasta n=1.

Reemplazamos en la serie de fourier correspondiente a la función $\mathbf{V_{(t)}}$ asi:

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1} \left\{ [a_n * \cos(n * 1.57 * t)] + [b_n * \operatorname{Sen}(n * 1.57 * t)] \right\}$$

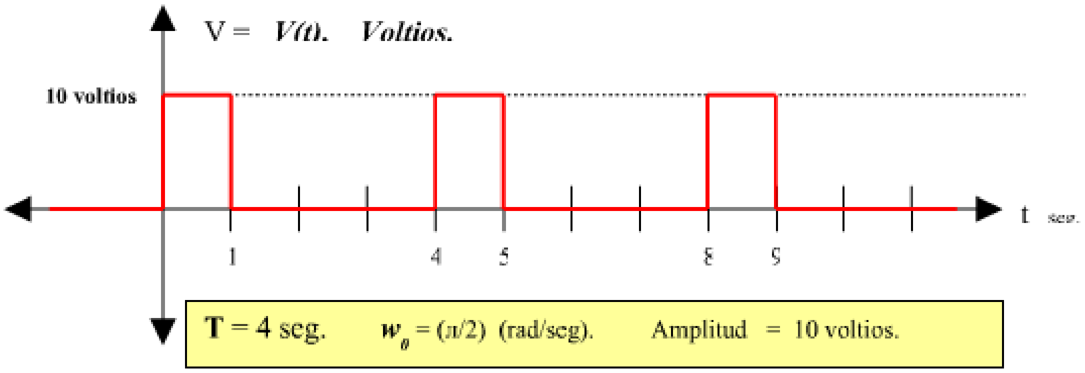
$$v(t) = 2{,}5 + \left[(3{,}18 \cos 1{,}57.t) + (3{,}18 sen 1{,}57.t)\right]$$

$$v(4) = 2{,}5 + \left[(3{,}18 \cos 1{,}57.(4)) + (3{,}18 sen 1{,}57.(4))\right] = 2{,}5 + 3{,}16 + 0{,}34 \boxed{= 6 volt}$$

Por lo tanto este va a ser el voltaje en el tiempo de t=4 para n=1 de señal de la antena.

d.- Proceso Coeficiente de fourier (con n=3)

La señal periódica $V_{(t)}$ de la antena, sin onda de simetría conocida, se dispersa con un amplitud de 10volts, tiempo 4 segundos y frecuencia $W_0=\pi/2$, calcula por serie de fourier la correspondiente función $V_{(t)}$ hasta **n=3**, el coeficiente de nivel de señal DC y los armónicos del seno y coseno, para ese tiempo.



Recordemos que la fórmula generalizada para las SERIES DE FOURIER es:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ [a_n * \cos (n w_0\, t)] + [b_n * \operatorname{Sen} (n w_0\, t)] \}$$

$w_0 = (\pi/2)$ (rad/seg) = 1.57 (rad/seg).

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} \{ [a_n * \cos (n*1.57*t)] + [b_n * \operatorname{Sen} (n*1.57*t)] \}$$

$$V(t) = a_0 + [a_1 * \cos (1*1.57*t)] + [a_2 * \cos (2*1.57*t)] + [a_3 * \cos (3*1.57*t)]$$
$$+ [b_1 * \operatorname{Sen} (1*1.57*t)] + [b_2 * \operatorname{Sen} (2*1.57*t)] + [b_3 * \operatorname{Sen} (3*1.57*t)]$$

Calculamos a0:

$$a_0 = \left(\frac{1}{T}\right) * \int_d^{(d+T)} f(t)\, dt = \left(\frac{1}{4}\right) * \int_0^4 V(t)\, dt = \left(\frac{1}{4}\right) * \int_0^4 10\, dt$$

$$a_0 = 0.25 * \left\{ \int_0^1 10\, dt + \int_1^4 0\, dt \right\} = (0.25*10) * \int_0^1 dt = 2.5 * \{ t \}_0^1$$

$$a_0 = 2.5 * \{ 1 - 0 \} = 2.5 * \{ 1 \} = 2.5$$

a_0 = **2.5** voltios. ; **Este es el nivel DC de la señal V (t).**

Calculamos an:

- ***Para encontrar los coeficientes a_n se utiliza la siguiente fórmula:***

$$a_n = \left(\frac{2}{T}\right) * \int_d^{(d+T)} f(t) * \text{Cos}(w_n\, t)\ dt$$; **Se cumple Para todas las n.**

Entonces, para el caso en que ***n=1*** *tenemos:*

$$a_1 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \text{Cos}(w_1\, t)\ dt$$; Se cumple para la n = 1.

$$a_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \text{Cos}(1 * 1.57 * t)\ dt + \int_1^4 0 * \text{Cos}(1 * 1.57 * t)\ dt \right\}$$

$$a_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \text{Cos}(1.57 * t)\ dt \right\} = 0.5 * 10 * \int_0^1 \text{Cos}(1.57 * t)\ dt$$

$$a_1 = 5 * \int_0^1 \text{Cos}(1.57 * t)\, dt = 5 * \left\{ \frac{\text{Sen}(1.57 * t)}{1.57} \right\}_0^1 = 3.18 * \left\{ \text{Sen}(1.57 * t) \right\}_0^1$$

$$a_1 = 3.18 * \left\{ \text{Sen}(1.57 * 1) - \text{Sen}(1.57 * 0) \right\} = 3.18$$

$\mathbf{a_1} = \mathbf{3.18}$ voltios. ; **Esta es la amplitud del ARMONICO número 1 en el coseno.**

$$a_2 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \text{Cos}(w_2\, t)\ dt$$; Se cumple Para la n = 2.

$$a_2 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \text{Cos}(2 * 1.57 * t)\ dt + \int_1^4 0 * \text{Cos}(2 * 1.57 * t)\ dt \right\}$$

$$a_2 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \text{Cos}(3.14 * t)\ dt \right\} = 0.5 * 10 * \int_0^1 \text{Cos}(3.14 * t)\ dt$$

$$a_2 = 5 * \int_0^1 \text{Cos}(3.14 * t)\, dt = 5 * \left\{ \frac{\text{Sen}(3.14 * t)}{3.14} \right\}_0^1 = 1.59 * \left\{ \text{Sen}(3.14 * t) \right\}_0^1$$

$$a_2 = 1.59 * \left\{ \text{Sen}(3.14 * 1) - \text{Sen}(3.14 * 0) \right\} = 0$$

$\mathbf{a_2} = \mathbf{0}$ voltios. ; **Esta es la amplitud del ARMONICO número 2 en el coseno.**

$$a_3 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \text{Cos}(w_3\, t)\ dt$$; Se cumple Para la n=3.

$\mathbf{a_3} = \mathbf{-1.06}$ voltios. ; **Esta es la amplitud del ARMONICO número 3 en el coseno.**

El resumen de los coeficientes a_0 *y* a_n *calculados hasta n = 3, es el siguiente:*

a_0 = **2.5** voltios. ; **Es nivel DC de la señal V (t).**
a_1 = **3.18** voltios. ; **Es la amplitud del ARMONICO número 1 en el coseno.**
a_2 = **0** voltios. ; **Es la amplitud del ARMONICO número 2 en el coseno.**
a_3 = **-1.06** voltios. ; **Esta es la amplitud del ARMONICO número 3 en el coseno.**

Ahora calculamos bn:

$$b_1 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \text{Sen}(w_1 t)\ dt \quad ; \quad \text{Se cumple Para la n = 1.}$$

$$b_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^4 V(t) * \text{Sen}(1*1.57*t)\ dt \right\}$$

$$b_1 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \text{Sen}(1.57*t)\ dt + \int_1^4 0 * \text{Sen}(1.57*t)\ dt \right\}$$

$$b_1 = 0.5 * 10 * \left\{ \int_0^1 \text{Sen}(1.57*t)\ dt \right\} = 5 * \left\{ \frac{-\text{Cos}(1.57*t)}{1.57} \Big|_0^1 \right\}$$

$$b_1 = -3.18 * \{ \text{Cos}(1.57*1) - \text{Cos}(1.57*0) \} = -3.18 * \{ 0 - 1 \}$$

b_1 = **3.18** voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 1 en el Seno.**

$$b_2 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \text{Sen}(w_2 t)\ dt \quad ; \quad \text{Se cumple Para la n = 2.}$$

$$b_2 = 0.5 * \left\{ \int_0^4 V(t) * \text{Sen}(2*1.57*t)\ dt \right\}$$

$$b_2 = 0.5 * \left\{ \int_0^1 10 * \text{Sen}(3.14*t)\ dt + \int_1^4 0 * \text{Sen}(3.14*t)\ dt \right\}$$

$$b_2 = 0.5 * 10 * \left\{ \int_0^1 \text{Sen}(3.14*t)\ dt \right\} = 5 * \left\{ \frac{-\text{Cos}(3.14*t)}{3.14} \Big|_0^1 \right\}$$

$$b_2 = -1.59 * \{ \text{Cos}(3.14*1) - \text{Cos}(3.14*0) \} = 3.18$$

b_2 = **3.18** voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 2 en el Seno.**

$$b_3 = \left(\frac{2}{4}\right) * \int_0^4 V(t) * \text{Sen}(w_3 t)\ dt \quad ; \quad \text{Se cumple Para la n = 3.}$$

b_3 = **1.06** voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 3 en el Seno.**

El resumen de los coeficientes b_n *calculados hasta n = 3 es el siguiente:*

b_1 = **3.18** voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 1 en el Seno.**
b_2 = **3.18** voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 2 en el Seno.**
b_3 = **1.06** voltios. ; **Esta es la amplitud del armónico número 3 en el Seno.**

Todos estos cálculos nos llevaron a encontrar los valores de los coeficientes de las series de fourier, ahora a0, an y bn son conocidas hasta n=3.

Ahora la reemplazamos en la serie de fourier correspondiente a la función v(t) así:

$$\begin{aligned} \mathbf{V(t)} = a_0 &+ [\, a_1 * \mathrm{Cos}\,(\, 1*1.57*\, t\,)\,] + [\, a_2 * \mathrm{Cos}\,(\, 2*1.57*\, t\,)\,] + [\, a_3 * \mathrm{Cos}\,(\, 3*1.57*\, t\,)\,] \\ &+ [\, b_1 * \mathrm{Sen}\,(\, 1*1.57*\, t\,)\,] + [\, b_2 * \mathrm{Sen}\,(\, 2*1.57*\, t\,)\,] + [\, b_3 * \mathrm{Sen}\,(\, 3*1.57*\, t\,)\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V(t)} = 2.5 &+ [\, 3.18 * \mathrm{Cos}\,(1.57*\, t\,)\,] + [\, 0 * \mathrm{Cos}\,(\, 3.14*\, t\,)\,] + [\, -1.06 * \mathrm{Cos}\,(\, 4.71*\, t\,)\,] \\ &+ [\, 3.18 * \mathrm{Sen}\,(1.57*\, t\,)\,] + [\, 3.18 * \mathrm{Sen}\,(\, 3.14*\, t\,)\,] + [\, 1.06 * \mathrm{Sen}\,(\, 4.71*\, t\,)\,] \end{aligned}$$

El voltaje en el tiempo de t=4 para n=3 de la señal de la antena es :

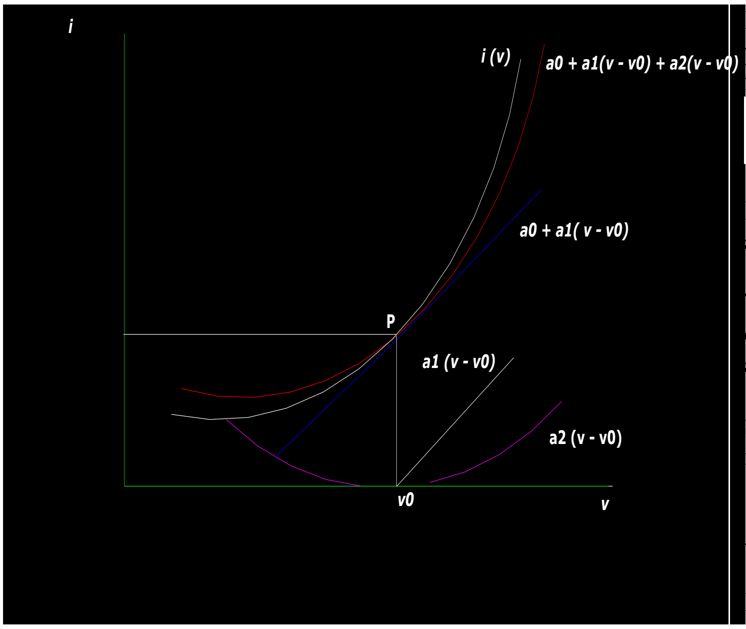
$V(4) = 2{,}5 + 3{,}16 + 0 - 1{,}003 + 0{,}34 + 0{,}69 + 0{,}34 = 6{,}27$ volt

APLICACIÓN: SERIE DE TAYLOR en CIRCUITO ELECTRICO

Previo al análisis de esta propuesta veamos los siguientes conceptos:

- **La potencia en Watts**: Es la "potencia real" consumida por el equipo.
- **Volts – amperes**: VA ó "potencia aparente" del equipo es el producto de la tensión aplicada y la corriente que por el circula. VA es usado para dimensionar los cables y los circuitos de protección.
- **Diodo**: Dispositivo unidireccional que permite obtener una tensión continua a partir de una fuente de corriente alterna lo cual ocurre porque deja circular corriente a través suyo cuando se conecta el polo positivo de la fuente al ánodo, y el negativo al cátodo, y se opone al paso de la misma si se realiza la conexión opuesta. A este proceso se llama rectificación.
- **Rectificador**: Circuito con diodos para lograr tensión continua partiendo de una tensión alterna.
- **Voltaje alterno**: Diferencia de potencia entre dos puntos de un campo electrostático es la diferencia entre los potenciales de dichos puntos; expresada en voltios.

La curva **i** del siguiente gráfico, cuya función de **v** es **i(v)**, cuyas derivadas en el punto **P**: $v = v_0$, son $i(v_0)$ $i'(v_0)$ $i''(v_0)$, etc.



La diferencia del voltaje v_0 en P y el voltaje v en otro punto de la curva es $v - v_0$, y la serie de potencias en función de esta diferencia será:

$$a_1(v - v_0) + a_2(v - v_0)^2 + a_3(v - v_0)^3 + \ldots$$

Esta serie igual a $i\ (v)$ en P, donde $v = v_0$, y es aproximación de $i\ (v)$ para valores de v cerca de v_0.

Tratamos que la curva de la serie coincida con la curva para $i\ (v)$ en el punto P. Para que la serie igual a i(v) en P:

$v = v_0$ e $i(v) = i\ (v_0)$

Sustituimos v_0 por v en la serie, y hacemos la serie igual a $i\ (v_0)$, obteniendo:

$$i(v_0) = a_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Donde: $a_0 = i\ (v_0)$, para $i(v) = a_0$ en el punto P. Pero a_0 no es aproximación de $i\ (v)$ en otros puntos.

La línea horizontal a_0 intercepta la curva $i\ (v)$ en el punto (v_0, i_o).

Considerando el segundo término de la serie, la segunda aproximación de $i\ (v)$ los dos términos es $a_0 + a_1\ (\ v_1 - v_0)$, que dan una recta inclinada que pasará a través del punto P, cuya pendiente es a_1 que es el valor conocido de la derivada $i'(v_0)$. Esta igualdad para obtener el mejor valor para a_1 ; encontramos que: $a_1 = i'(v_0)$.

Sumamos un tercer término a la serie, un término cuadrático, y sumamos una parábola a la línea recta inclinada, para hacer una aproximación mejor, que para i es: $a_0 + a_1(v - v_0) + a_2(v - v_0)^2$ Como la aproximación pasará por el punto correcto (por elección de a_0), y que tendrá la pendiente correcta (por elección de a_1); procuraremos que tenga la curvatura correcta (por elección de a_2), haciendo la segunda derivada de la parábola igual a la segunda derivada de la función. La segunda derivada de la parábola, encontrada diferenciando la expresión:

$$a_0 + a_1(v - v_0) + a_2(v - v_0)^2$$

es $2a_2$.

Esto se iguala a $i''(v_0)$, segunda derivada conocida de la función en v_0: a_1 $2a_2 = i''(v_0)$

Por tanto $a_0 = (1/2)i''(v_0)$, asi, todos los coeficientes de la serie pueden evaluarse, término por término, sumando una curva cúbica para hacer que la tercera derivada concuerde, posteriormente un término a la cuarta potencia, etc.

La serie de potencias así obtenida, serie de Taylor, se escribe formalmente:

$$i(v) = i(v_0) + i'(v_0)(v - v_0) + \frac{i''v_0}{2!}(v - v_0)^2 + \ldots$$

APLICACIÓN: Propuesta: "**Existen razones teóricas para creer que las característica de volts – amperes de un diodo termiónico es una función con potencia de tres medios**":

$$i = k\left(1 + \frac{v}{E_b}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Desarrollaremos esta función en una serie para calcular i cuando v es un pequeño voltaje alterno, variándolos desde v = 0; partiendo del punto v = 0, esto es en la figura, $v_1 = 0$, la ecuación es:

$$\mathrm{i}(v) = i(v_0) + i'(v_0)(v - v_0) + \frac{i''v_0}{2!}(v - v_0)^2 + \dots$$

$$i(v) = i(0) + i'(0)v + \frac{\mathrm{i}''(0)}{2!}v^2 + \dots$$ Serie de Maclaurin.

Donde i (0) para v = (0) en la ecuación: $i = k\left(1 + \frac{v}{E_b}\right)^{\frac{3}{2}}$, obteniendo i(o) = k

La primera y segunda derivadas de la corriente son:

$$\mathrm{i}'(v) = \frac{di}{dv} = \frac{3k}{2E_b}\left(1 + \frac{v}{E_b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{i}'(0) = \frac{3}{2}\frac{k}{E_b}$$

$$\mathrm{i}''(v) = \frac{d^2 i}{dv^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{k}{E_b}\left(1 + \frac{v}{E_b}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$i''0 = \frac{3}{4}\frac{k}{E_b^2}$$

Coeficientes que se usarán en la ecuación:

$$i(v) = i(0) + i'(0)v + \frac{\mathrm{i}''(0)}{2!}v^2 + \dots$$

$$i(v) = K + \frac{3}{2}\frac{K}{E_b}v + \frac{3}{8}\frac{K}{E_b^2}v^2 + \dots = \mathrm{K}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{v}{E_b} + \frac{3}{8}\frac{v^2}{E_b^2} + \dots\right)$$

Expresión de la característica de un diodo se obtiene como una serie de potencias.

APLICACIÓN: CUERDAS Y MEMBRANAS QUE VIBRAN

Cuando se perturba un sistema perdiendo su posición de equilibrio estable un movimiento oscilatorio que resulta periódico, es decir, se repite a sí mismo, tales como las oscilaciones de barcos que suben y bajan, los péndulos del reloj que oscilan de un lado a otro, y las cuerdas y las lengüetas de los instrumentos musicales que vibran al producir los sonidos.

El movimiento ondulatorio está ligado al movimiento oscilante. Las ondas sonoras, por ejemplo, se producen mediante cuerdas en vibración (como las cuerdas de un violín), el parche de un tambor en vibración o las vibraciones de nuestras cuerdas vocales al hablar.

Ejemplo si se estira una cuerda de longitud L entre los puntos (0,0) y (L,0) en el eje x. En el tiempo t = 0 tiene la forma dada por f(x), 0 < x < L, y se suelta partiendo del reposo. Encontrar el desplazamiento de la cuerda en tiempo posterior.

La ecuación de la cuerda que vibra es : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $\quad 0 < x < L,\ t > 0$

Donde: $y(x, t)$ = al desplazamiento desde el eje de x en el tiempo t. y dado que:

- Los extremos de la cuerda están fijos en x = 0 y x = L: **y(0,t) = y (L,t) = 0 t > 0**
- La formula inicial de la cuerda esta dado por f(x): **y(x,0) = f(x) 0 < x < L**
- La velocidad inicial de la cuerda es cero, y_t **(x,0) = 0 0 < x < L**

Para resolver este problema de valor limite, sea y = XT como de costumbre

Entonces $XT'' = a^2 X''T$ ó $T''/ a^2 T = X''/X$

Llamando la constante de separación $-\lambda^2$, tenemos: $\mathbf{T'' + \lambda^2 a^2 T = 0}$ $\quad \mathbf{X'' + \lambda^2 X = 0}$

y $T = A_1 \operatorname{sen}\lambda at + B_1 \cos\lambda at$ $\qquad X = A_2 \operatorname{sen}\lambda x + B_2 \cos\lambda x$

Una solución es: $y(x,t) = XT = (A_2 \operatorname{sen}\lambda at + B_2 \cos\lambda x) (A_1 \operatorname{sen}\lambda at + B_1 \cos\lambda at)$

De $y(0,t) = 0$, $A_2 = 0 \rightarrow y(x,t) = B_2 \operatorname{sen}\lambda x (A_1 \operatorname{sen}\lambda at + B_1 \cos\lambda at) = \operatorname{sen}\lambda x (A \operatorname{sen}\lambda at + B \cos\lambda at)$

De y(L,t) = 0, tenemos $\operatorname{sen}\lambda L (A\operatorname{sen}\lambda at + B\cos\lambda at) = 0$, de manera que $\operatorname{sen}\lambda L = 0$, $\lambda L = m\pi$ ó $\lambda = m\pi /L$, puesto que el segundo factor no debe ser igual a cero.

Ahora, $y_t(x,t) = \operatorname{sen}\lambda x (A\lambda a \cos\lambda at - B\lambda a \operatorname{sen}\lambda at)$

y $y_t(x,0) = (\operatorname{sen}\lambda x) (A\lambda a) = 0$, de la cual A = 0. De donde $y(x,t) = B\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{m\pi at}{L}$

Para satisfacer la condición y(x,0) = f(x), suponemos soluciones de modo que

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{m\pi at}{L}$$

Entonces $$y(x,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}$$

Y por la teoría de Fourier: $$B_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx$$

El resultado final es y(x,t) = $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi at}{L}$

Los términos en esta serie son módulos normales de vibración, cuya frecuencia f_m del modulo normal m se obtiene del término que contiene $\cos\frac{m\pi at}{L}$ y es dado por $2\pi f_m = \frac{m\pi a}{L}$ ó $f_m = \frac{ma}{2L} = \frac{m}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

Como las frecuencias son múltiplos de la frecuencia más baja f_1 (llamada frecuencia fundamental), las vibraciones de la cuerdas producirán un tono musical como en el caso de una cuerda de violín o de piano.

- La frecuencia de resonancia más baja produce el esquema de ondas estacionarias que recibe el nombre de modo fundamental de vibración o primer armónico.

- La segunda frecuencia más baja f_2 este modo de vibración tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia fundamental y se denomina segundo armónico.

- La tercera frecuencia más baja, f_3 es tres veces la fundamental y produce el esquema del tercer armónico

EJEMPLO: **Una cuerda de 3m de longitud y densidad másica 0,0025kg/m está sujeta por sus extremos. Una de sus frecuencias de resonancia es 252 Hz y la siguiente es 336 Hz.**

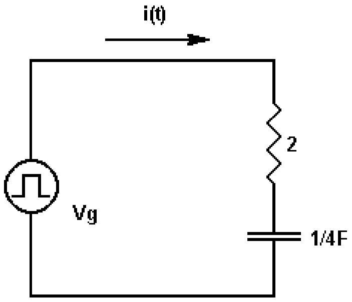
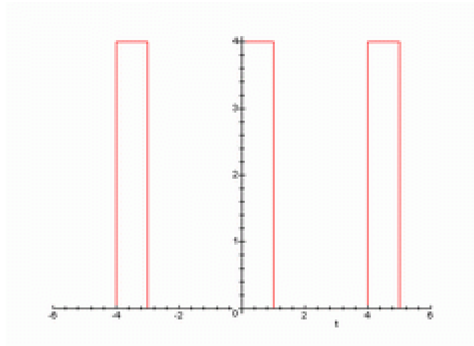
A) Hallar la frecuencia fundamental: Cada frecuencia de resonancia es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. El cociente entre dos frecuencias de resonancia sucesivas deben estar entre sí como la razón de dos números sucesivos. El cociente entre las frecuencias dadas es $\frac{336}{252} = 1{,}33$, que es la razón de 4 a 3. Por lo tanto, 336 Hz debe ser el cuarto armónico y 252 Hz, el tercero. La frecuencia fundamental es:

$$f_1 = \frac{1}{3}f_3 = \frac{252Hz}{3} = 84Hz$$

B) La tensión de la cuerda: Como la tensión de la cuerda se halla calculando la velocidad de la onda, en el caso del armónico fundamental la longitud de onda vale $\lambda = 2l = 6m$ y la velocidad de la onda es, pues, $v = f\lambda = (84Hz).(6m) = 504m/s$. La tensión se obtiene entonces así

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad \tau = \mu v^2 = (0{,}0025kg/m).(504m/s)^2 = 635N$$

APLICACIÓN: VOLTAJE DE UN CONDENSADOR por Serie de Fourier

Calcular V del condensador: 	$Vg(t) = \begin{cases} 4 \leftarrow 0 < t < 1 \\ 0 \leftarrow 1 < t < 4 \end{cases}$ $T = 4s \;;\; \omega_o = \frac{\pi}{2} \; rad/s$ $v(t) = v(t+T)$ $\frac{a_0}{2} = 1 \; V$	

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_o\cdot t)\cdot dt = \frac{2}{4}\cdot\int_0^1 4\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot dt = 2\cdot\left[\frac{\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{n\cdot\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 =$$

$$a_n = \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_o\cdot t)\cdot dt = \frac{2}{4}\cdot\int_0^1 4\cdot\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot dt = 2\cdot\left[\frac{-\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{n\cdot\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 =$$

$$b_n = \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left[-\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right]$$

$$A_n = \sqrt{\left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left[-\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right]^2+\left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\sin^2\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$A_n = \left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)\cdot\sqrt{\left[-\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right]^2+\sin^2\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$A_n = \left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)\cdot\sqrt{-2\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1+\cos^2\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)\cdot\sqrt{-2\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1+1} =$$

$$A_n = \left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)\cdot\sqrt{2-2\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\phi_n = -\operatorname{arctg}\frac{\left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)\cdot\left[-\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right]}{\left(\frac{4}{n\cdot\pi}\right)\cdot\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$Vg(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot t + \phi_n\right)$$

$$Vg(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n \cdot \pi}\right) \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot t - \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$H(p) = \frac{\frac{4}{p}}{2 + \frac{4}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{p}{2}}$$

$$H(j\omega_n) = \frac{1}{1 + \frac{(j\omega_n)}{2}} = \begin{cases} |H(j\omega_n)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_n^{\,2}}{2^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4}}} \\ \phi_n = -\operatorname{arctg} \dfrac{\omega_n}{2} = -\operatorname{arctg} \dfrac{n \cdot \pi}{4} \end{cases}$$

$$Vc_f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4}}} \cdot A_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot t + \phi_n - \operatorname{arctg} \frac{n \cdot \pi}{4}\right)$$

En la exposición de los diversos temas se usan la siguiente convención de signos:

$\in$	Pertenece	$\Rightarrow$	Implica
$\notin$	No Pertenece	$\Leftrightarrow$	Si y solo Si
$\exists$	Existe	$\forall$	Para todo
$\subset$	Conjunto	/	Tal que

$\in$ L_1 w^2 $\geq \leq$