MATEMATICA SUPERIOR APLICADA

Wilo Carpio Cáceres

2012

A mis queridos hijos . . .

Para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden "n" con coeficientes constantes del tipo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \qquad \text{[I]}$$

1. Uso la notación	$\frac{dy}{dx} = Dy.,\quad \frac{d^2}{dx^2} = D^2 y.\ldots\quad \frac{d^n}{dx^n} = D^n y.$
2. [I]: Queda como	$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + .. + a_{n-1} Dy + a_n y = f_{(x)}$
3. Saco factor común: **y**	$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + .. + a_{n-1} D + a_n).y = f_{(x)}$
4. Despejo **y**, luego la solución es:	$y = \frac{1}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n} f_{(x)}$

Donde $(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + .. + a_{n-1} D + a_n)$ es el **Operador diferencial lineal de orden n,** que es la notación simbólica que indica que se **efectúan operaciones de diferenciación** sobre la función **y**. Por tanto, no es una expresión algebraica que multiplica a **y**.

Ejemplo:
El operador diferencial **$(D^2 - 2D + 5)$** para **y = log x**
Implica el siguiente proceso:

$$f(x) = (D^2 - 2D + 5)\,y = (D^2 - 2D + 5).\log x = d^2 \frac{\log .x}{dx^2} - 2d\frac{\log .x}{dx} + 5.\log .x = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5.\log .x$$

La ventaja del operador lineal con coeficientes constantes obedece formalmente a las mismas leyes válidas para los polinomios; por tanto en el operador se mantienen la propiedad distributiva, la ley conmutativa y también se conserva la ley de los exponentes.

Por ello, factorizando el denominador de la solución simbólica

- $y = \frac{1}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n} f(x)$ se obtendrá:

- $y = \frac{1}{(D - m_n)(D - m_{n-1})\ldots(D - m_1)} f(x)$

Así, la solución simbólica toma la forma de:

- $y = \frac{1}{(D - m_n)} \cdot \frac{1}{(D - m_{n-1})} \cdot \frac{1}{(D - m_1)} f(x)$

Este formato demuestra que en las ecuaciones lineales, **la solución se determina sumando sus soluciones parciales**.

La solución de la:

ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN (ELPO): **cumple la condición:**

Solución General = Función Complementaria + Integral Particular.

$$y = c\,e^{-ax} + e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)}\,dx$$

Genera dos casos de solución:

Proceso	Caso 1 ELPO **incompleta** $y' = f(x)$	Caso 2: ELPO **completa** $y' + a\,y = f(x)$
1. **Forma general** de la ecuación	$\frac{dy}{dx} = f(x),$	$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$
2. Formato de **operador**	$D.y = f(x)$	$(D + a)\,y = f(x)$
3. Despejando "**y**", el 2º miembro, es: **"Operador Integral "**	$y = \frac{1}{D} f(x)$	$y = \frac{1}{D+a} f(x)$
4. El **"Operador Integral " es símbolo de integración**, la solución de 3 es:	$y = \int f_{(x)}\,dx$	$y = c\,e^{-ax} + e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)}dx$ Donde: -**Función Complementaria:** $c\,e^{-ax}$ -**Integral Particular**: $e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)}dx$
5. Para **generalizar** el proceso, se igualan los "y" de los pasos 3 y 4	$\frac{1}{D} f_{(x)} = \int f_{(x)}\,dx$	Para c = 0 $\frac{1}{D+a} f_{(x)} = e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)}\,dx$

TEOREMA GENERAL: Como la ecuación lineal de orden **n**, se comporta como la ELPO, la **Solución General** es la suma de una **Función Complementaria** más una **Integral Particular.**

1. Sea una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes:
$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

2. Si en ella se sustituye $y = e^{mx}$, resulta: $\frac{d^n e^{m.x}}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}e^{m.x}}{dx^{n-1}} + \dots\dots\dots + a_{n-1}\frac{de^{m.x}}{dx} + a_n e^{m.x} = 0$
luego, al resolver resultará: $(m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + .. + a_{n-1}m + a_n)e^{mx} = 0$

3. Como $(m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + .. + a_{n-1}m + a_n)e^{mx} = 0$, tiene **n** raíces distintas: $m_1, m_2, m_3,., m_n$, habrá en correspondencia "n" soluciones distintas $y_1 = e^{m_1.x}; y_2 = e^{m_2.x},..y_n = e^{m_n.x}$.

4. Dado el carácter lineal de: $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$, si $y = e^{mx}$ es solución, también lo será $y = c_i e^{mx}$ donde c_i es una constante arbitraria.

Como la suma de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea es también solución de: $\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=0$, luego: $y=c_1e^{m_1.x}+c_2e^{m_2.x}+\ldots\ldots+c_ne^{m_n.x}$, es solución complementaria con n constantes arbitrarias c_i, donde las raíces m_i son distintas.

5. Si y = u(x), es solución particular de $\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x)$, para $f(x)\neq 0$, $\mathbf{y = c_1e^{m1.x}+ c_2e^{m2.x}+\ldots +c_ne^{mn.x}+ u_{(x)}}$ es solución general de la ecuación

Aplicar el teorema de OPERADORES:

Solución General = Función Complementaria + Integral Particular.

$$y = (c_1e^{m_1.x}+c_2e^{m_2.x}+\ldots+c_ne^{m_n.x}) + \frac{1}{(D-m_n)}\cdot\frac{1}{(D-m_{n-1})}\ldots\frac{1}{(D-m_{n-1})}f(x)$$

Resolver: $.\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=e^{-x}$ En formato operador → $\mathbf{(D^3 - D^2 - 2D)\ y = e^x}$

Proceso	Desarrollo
Calculo **n** raíces **$m_1, m_2, \ldots m_n$** de la función complementaria: **$m^n+a_1m^{n-1}+a_2m^{n-2}+\ldots$ $+a_{n-1}m+a_n=0$**	Si: $m^3-m^2-2m=0$ → $m(m^2-m-2)=0$, Una raíz es $m_1=0$; las demás son raíces de, $a.m^2+bm+c=0$ $m_i=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a.c}}{2.a}$ Para $(m^2-m-2)=0$, es: $m_i=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$, **$m_2 = 1$ y $m_3 = 2$**
FUNCIÓN COMPLEMENTARIA	Para las raíces: $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$ función complementaria es: $\mathbf{Y} = (c_1e^{m_1.x}+c_2e^{m_2.x}+\ldots+c_ne^{m_n.x}) = c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$
INTEGRAL PARTICULAR:	POR MÉTODO DE ITERACIÓN
Para las raíces encontradas, aplico: $\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)dx$ y $\frac{1}{D+a}f_{(x)}=e^{-ax}\int e^{ax}f_{(x)}\,dx$	Para raices: $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ y $m_3 = 2$ y la función: $f_{(x)}=e^{-x}$, $.u_{(x)}=\frac{1}{(D-2)}\cdot\frac{1}{(D-1)}\cdot\frac{1}{(D-0)}e^{-x}=\frac{1}{(D-2)}\cdot\frac{1}{(D-1)}\cdot\frac{1}{D}e^{-x}$ $u_{(x)}=\frac{1}{(D-2)}\frac{1}{(D-1)}\int e^{-x}dx=\frac{1}{(D-2)}.e^x.\int e^x e^{-x}dx$ $.u_{(x)}=e^{2x}\int e^{-2x}x.e^{-x}dx=e^{2x}\int .x.e^{-3x}.dx=e^{2x}\frac{x.e^{-3x}}{3}=\frac{1}{3}x.e^{-x}$
Solución:	$y=\mathbf{Y}+u_{(x)}=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+\frac{1}{3}x.e^{-x}$

INTEGRAL PARTICULAR DE ECUACIONES LINEALES:

Para determinar la integral particular de la ecuación $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$:

A.-CASO DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE 2º ORDEN

1. La solución general de la ecuación homogénea $\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$, está dada por:
   - Si $m_1 \neq m_{2.}$: $y = c_1 e^{m_1.x} + c_2 e^{m_2.x}$
   - Si $m_1 = m_2$.: $y = (c_1 + c_2)e^{m.x}$

2. Para ello, sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficiente constante: $\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x)$ que podemos escribirla como $(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$

3. Factoreando $(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$, → $(D - m_1).(D - m_2)y = f(x)$ luego, acomodando términos resulta: $(D - m_2)y = \frac{1}{D - m_1} f(x)$

4. Como $\frac{1}{D+a} f(x) = e^{-a.x} \int e^{a.x} f(x).dx$, por el signo: $(D - m_2)y = e^{m_i.x} \int e^{-m_i.x} f(x)dx$ de donde, despejamos $y = \frac{1}{D - m_2} e^{m_i.x} \int e^{-m_i.x} f(x)dx$

5. Si $m_1 \neq m_{2.}$, resultará $y = e^{m_2.x} \int \left[e^{(m_1 - m_2).x} . \int e^{-m_1.x} f(x)dx \right] dx$..

6. Ahora si: $m_1 = m_2$, entonces será $y = e^{m_1.x} \int \int e^{-m_i.x} f(x)dx.dx$

7. Por sustitución en $(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$, podemos establecer que la función $y = \frac{1}{D - m_2} e^{m_i.x} \int e^{-m_i.x} f(x)dx$ es una solución particular de $(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$

B.-CASO DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE ORDEN "n":

Abarca 2 métodos para determinar **integral particular** de

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = f(x)$$

- **B.1.-MÉTODO DE ITERACIÓN**: Se aplica cuando las raíces son iguales y permite obtener la **integral particular** $y = e^{m_1 . x}\int e^{(m_{.2}-m_{.1}).x} . \int e^{(m_3 - m_{.2}).x} \ldots\ldots \int e^{-m_n . x} . f(x).dx^n$.

1. De: $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$, ó: $\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = f(x)$

   se obtiene **solución simbólica** $y = \frac{1}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n} f(x)$

2. Factoreando el denominador $\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right)$ podemos llevarla a la forma (D - m_1)(D - m_2)...(D - m_n), por lo tanto, al reemplazar en la expresión

   $y = \frac{1}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n} f(x)$ → y = $\frac{1}{(D^n - m_n)(D^n - m_{n-1})\ldots(D^n - m_1)} f(x)$

3. La ecuación y = $\frac{1}{(D^n - m_n)(D^n - m_{n-1})\ldots(D^n - m_1)} f(x)$, también podemos escribirla

   como y = $\frac{1}{(D^n - m_n)} \cdot \frac{1}{(D^n - m_{n-1})} \ldots . \frac{1}{(D^n - m_1)} f(x)$

4. Aplico sucesivamente el operador $\frac{1}{(D - m)}$ sobre f(x) para lograr la ecuación

   $y = e^{m_1 . x}\int e^{(m_{.2}-m_{.1}).x} . \int e^{(m_3 - m_{.2}).x} \ldots\ldots \int e^{-m_n . x} . f(x).dx^n$, que es la **integral particular** buscada.

Aplicar el teorema de OPERADORES con el METODO DE ITERACION:

Solución General = Función Complementaria + Integral Particular.

$$y = (c_1e^{m_1.x}+c_2e^{m_2.x}+...+c_ne^{m_n.x}) + \frac{1}{(D-m_n)}\cdot\frac{1}{(D-m_{n-1})} f(x)$$

Resolver: $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=e^x$ En formato operador → $(D^2 - 6D + 8)y = e^x$

Proceso	Desarrollo
Raíces para la función complementaria	$(D^2 - 6D + 8)y = e^x \rightarrow m^2 - 6m + 8 = 0$ $m_i = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(36)-4.1.8}}{2.1} = \frac{6\pm 2}{2}$ $m_1 = 4$, $m_2 = 2$
FUNCIÓN COMPLEMENTARIA	Para las raíces: $m_1 = 4$, $m_2 = 2$ $(c_1e^{m_1.x}+c_2e^{m_2.x}+...+c_ne^{m_n.x}) = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$
INTEGRAL PARTICULAR:	POR MÉTODO DE ITERACIÓN
Para las raíces encontradas, aplico: $\frac{1}{D+a}f_{(x)} = e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)}\,dx$	Para las raíces: $m_1 = 4$, $m_2 = 2$ la integral particular es: $u_{(x)} = \frac{1}{(D-2).(D-4)}.e^x = \frac{1}{(D-2)}\frac{1}{(D-4)} e^x$ • Para la raiz: $m_1 = 4$ y la función $f_{(x)} = e^x$: $\frac{1}{D+a} f_{(x)} = \frac{1}{(D-4)} e^x = e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)}\, dx,$ $\frac{1}{(D-4)} e^x = e^{-(-4).x}\int e^{(-4).x} e^x dx = e^{4.x}\int e^{-3x} dx$ $= e^{4.x}\frac{e^{-3x}}{3} = \frac{e^x}{3}$ que es el nuevo: $f_{(x)} = \frac{e^x}{3}$ • Para la raiz: $m_2 = 2$ y la función $f_{(x)} = \frac{e^x}{3}$: $y = \frac{1}{D-2} f_{(x)} = \frac{1}{(D-2)}\frac{e^x}{3} = e^{-(-2)..x}\int(e^{(-2)x}\frac{e^x}{3})dx$ $y = e^{2.x}\int(e^{-2x}\frac{e^x}{3})\, dx = e^{2.x}\int(\frac{e^{-x}}{3})\, dx$ $y = \frac{e^{2x}}{3}\int e^{-X}dx = \frac{e^{2x}}{3} e^{-.x} = \frac{e^x}{3}$
Solución:	$y = c_1e^{4x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{3}e^x$

- **B.2-MÉTODO DE LAS FRACCIONES PARCIALES**: Se aplica cuando las raíces son distintas y permite obtener la integral particular

$$y = A_1 e^{m.x} \int e^{-m.x} f(x)dx + A_2 e^{m.x} \int e^{-m.x} f(x)dx + ... + A_n e^{m.x} \int e^{-m.x} f(x)dx.$$

1. Descompongo el denominador de $y = \dfrac{1}{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n} f(x)$ en fracciones particulares → $y = \left[\dfrac{A_1}{(D-m_1)} + \dfrac{A_2}{(D-m_2)} + ... + \dfrac{A_n}{(D-m_n)} \right] f(x)$

2. Aplico el operador $\dfrac{1}{D+a} f(x) = e^{-a.x} \int e^{a.x} f(x).dx$, obtengo la **integral particular** $y = A_1 e^{m.x} \int e^{-m.x} f(x)dx + A_2 e^{m.x} \int e^{-m.x} f(x)dx + ... + A_n e^{m.x} \int e^{-m.x} f(x)dx.$

Aplicar el teorema de OPERADORES con el método de FRACCIONES PARCIALES:

Solución General = Función Complementaria + Integral Particular.

$$y = (c_1e^{m_1.x} + c_2e^{m_2.x} + ... + c_ne^{m_n.x}) + \frac{1}{(D-m_n)} \cdot \frac{1}{(D-m_{n-1})} f(x)$$

Resolver: $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = e^x$ En formato operador → **(D^2 - 6D + 8)y = e^x**

Proceso	Desarrollo
Raíces para la función complementaria	**(D^2 - 6D + 8)y = e^x → $m^2 - 6m + 8 = 0$** $m_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(36)-4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm 2}{2}$ **$m_1 = 4$, $m_2 = 2$**
FUNCIÓN COMPLEMENTARIA	Para las raíces: **$m_1 = 4$, $m_2 = 2$** $(c_1e^{m_1.x} + c_2e^{m_2.x} + ... + c_ne^{m_n.x})$ = **$c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$**
INTEGRAL PARTICULAR:	POR MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES
Para las raíces encontradas, aplico: $u_{(x)} = \frac{1}{(D-2)(D-4)}e^x$ como: $u_{(x)} = \left[\frac{A}{D-2} + \frac{B}{D-4}\right]e^x$	Para las raíces: **$m_1 = 4$, $m_2 = 2$** la integral particular es: De donde: $\frac{1}{(D-2)(D-4)} = \left[\frac{A}{D-2} + \frac{B}{D-4}\right]$ Multiplicando ambos miembros por: **(D-2)(D-4)** **1 = A(D-4)+B(D-2)=AD – 4A + BD – 2B = (A+B)D – (4A + 2B)** Si: **(A+B)D = 0** → **(A+B) = 0**, luego: **A = - B** y **D = 0** Así: **1 = (A+B)D – (4A + 2B) = (-B+B)0-(4(-B)+2B) = -(4(-B)+2B) = -(-4B+2B) = -(-2B)** **1 = 2B**, de donde: **B** = $\frac{1}{2}$; Por tanto: **A** = - $\frac{1}{2}$ Reemplazo **A** y **B** en: **$u_{(x)}$** $= \left[\frac{A}{D-2} + \frac{B}{D-4}\right]e^x =$ $\left[\frac{-1/2}{D-2} + \frac{1/2}{D-4}\right]e^x = \left[\frac{-1/2}{D-2}\right]e^x + \left[\frac{1/2}{D-4}\right]e^x$ $u_{(x)} = -\frac{1}{2}e^{2x}\int e^{-2x}e^x dx + \frac{1}{2}e^{4x}\int e^{-4x}e^x dx$ $= \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} - \frac{1}{6}e^{4x}e^{-3x} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^x = \frac{1}{3}e^x$ $f_{(x)} = \frac{e^x}{3}$
Solución:	**$y = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$** $+ \frac{1}{3}e^x$

Aplicar el teorema de OPERADORES con el método de FRACCIONES PARCIALES:

Solución General = Función Complementaria + Integral Particular.

$$y = (c_1 e^{m_1 .x} + c_2 e^{m_2 .x} + \ldots + c_n e^{m_n .x}) + \frac{1}{(D-m_n)} \cdot \frac{1}{(D-m_{n-1})} f(x)$$

Resolver: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 54y = 0$ En formato operador → **$(D^2 + 3D + 56)y = 0$**

Proceso	Desarrollo
Raíces para la función complementaria	**$(D^2+3D+56)y = e^x \rightarrow m^2 + 3m + 56 = 0$** $m_i = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(1)(-54)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2}$, **$m_1 = 6$, $m_2 = -9$**
FUNCIÓN COMPLEMENTARIA	Para las raíces: **$m_1 = 6$, $m_2 = -9$** $Y = (c_1 e^{m_1 .x} + c_2 e^{m_2 .x} + \ldots + c_n e^{m_n .x}) =$ **$c_1 e^{6x} + c_2 e^{-9x}$**
INTEGRAL PARTICULAR:	POR MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES
Para las raíces encontradas, aplico: **$u_{(x)}$**$= \frac{1}{(D-2)(D-4)} e^x$ como: **$u_{(x)}$**$= \left[\frac{A}{D-2} + \frac{B}{D-4}\right] e^x$	Para las raíces: **$m_1 = 6$, $m_2 = -9$**, y **$f(x) = 0$** integral particular es: **$u_{(x)}$**$= \frac{1}{(D-(-9))} \cdot \frac{1}{(D-6)}\ 0$ De las relaciones: • $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)dx$ • $\frac{1}{D+a} f(x) = e^{-a.x} \int e^{a.x} f(x).dx$; **$u_{(x)}$**$= \frac{1}{(D-(-9))} \cdot \frac{1}{(D-6)}\ 0$ **$u_{(x)}$**$= \frac{1}{(D-(-9))} e^{6.x} \int e^{-6.x}.0.dx = 0$
Solución:	$y = Y + u(x)$: **$y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-9x}$**

Ejemplo 3: Por el método de operadores, resolver la ecuación $\frac{d^3x}{dy^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

Aplicamos el teorema general de los operadores:

Solución General = Función Complementaria + Integral Particular.

. $y = (c_1e^{m_1.x} + c_2e^{m_2.x} + ... + c_ne^{m_n.x}) + \frac{1}{(D-m_n)} \cdot \frac{1}{(D-m_{n-1})} \cdots \frac{1}{(D-m_1)} f(x)$

Para ello, desarrollamos el siguiente proceso:

1. Escribimos $\frac{d^3x}{dy^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 = 0$ en formato operador: $(m^3 - 3m^2 + 4)y = 0$

2. Calculamos las **n raíces** m_1, m_2,.. , m_n, de la **ecuación auxiliar**: $m^n + a_1m^{n-1} + ... + a_{n-1}m + a_n = 0$

   - Factoreando la ecuación de 3º grado $m^3 - 3m^2 + 4 = 0$ queda: $(m+1)(m-2)^2 = 0$; luego las raíces serán $m_1 = -1$; $m_2 = 2$; $m_3 = 2$

3. Calculamos la **Función Complementaria** $Y = (c_1e^{m_1.x} + c_2e^{m_2.x} + ... + c_ne^{m_n.x})$, con las raíces: m_1, m_2,

   - Si: $m_1 = -1$; $m_2 = 2$; $m_3 = 2$, la función complementaria es
   $y = e^{m_i.x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) = e^{m_i.x}c_1 + c_2xe^{m_2.x} + c_3x^2e^{m_3.x} = e^xc_1 + c_2xe^{-2.x} + c_3x^2e^{-2.x}$
   $y = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^{2.x}$

4. La **Integral Particular**: $u(x) = \frac{1}{(D-m_n)} \cdot \frac{1}{(D-m_{n-1})} \cdots \frac{1}{(D-m_1)} f(x)$; con: m_1, m_2,

   Para $m_1 = -1$; $m_2 = 2$; $m_3 = 2$ y si: Para la función f(x) = 0,

   $u(x) = \frac{1}{(D-1)} \cdot \frac{1}{(D+2)} \frac{1}{(D+2)} . 0$

5. **De las relaciones**:
   - $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)dx$
   - $\frac{1}{D+a} f(x) = e^{-a.x} \int e^{a.x} f(x).dx$; $u(x) = \frac{1}{(D-m_n)} \cdot \frac{1}{(D-m_{n-1})} \cdot \frac{1}{(D-m_1)} f(x)$

   Para f(x) = 0, resulta: u(x) = 0

6. **Solución General** será y = Y + u(x): $y = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^{2.x}$

Ejemplo 4: Por el método de operadores, resolver la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{2x}$

En formato de operador: $(m^2 - 2m + 1)\, y = 2e^x$

Las raíces de la ecuación: $m^2 - 2m + 1 = 0$ son: $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$

Función complementaria: $y = c_1e^x + c_2e^x$

Integral particular: $u(x) = \frac{1}{(D-1)}\frac{1}{(D-1)}e^{2x} = e^x \int e^{-x}.(e^x.\int e^{-x}.e^{2x}.dx).dx = e^x.\int e^{-x}.e^x.e^x\,dx = e^x.e^x = e^{2x}$

Solución general: $y = y + u(x) = c_1e^x + c_2e^x + e^{2x}$

Ejemplo 5: Por el método de operadores, resolver la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 7y = e^x$

En formato de operador: $(m^2 - 6m + 7)\, y = e^x$

Las raíces de la ecuación: $m^2 - 6m + 8 = 0$ son: $m_1 = 1$ y $m_2 = -7$

Función complementaria: $y = c_1e^x + c_2e^{-7x}$

Integral particular: $u(x) = \frac{1}{(D-7)}\frac{1}{(D-1)}e^x = e^{-7x}\int e^{7x}.(e^x.\int e^{-x}.e^x.dx).dx = e^{-7x}.\int e^{7x}.e^x.x\,dx = e^{-7x}.\int e^{8x}.x\,dx;$

Integrando por partes: Si $u = x$ será $du = dx$ y si: $dv = e^{8x}dx$ será: $v = \frac{e^{8x}}{8}$

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ $t = 8x$ $dt = 8.dx$ $\frac{dt}{8} = dx$, $\int e^t\frac{dt}{8} = \frac{e^{8x}}{8}$

$u(x) = \int (x.e^{8x})dx = x.\frac{e^{8x}}{8} - \int(\frac{e^{8x}}{8}).dx = x.\frac{e^{8x}}{8} - 1\frac{1}{8}\frac{e^{8x}}{8} = x.\frac{e^{8x}}{8} - \frac{e^{8x}}{64}$

Solución general: $y = c_1e^x + c_2e^{-7x} + x.\frac{e^{8x}}{8} - \frac{e^{8x}}{64}$

Ejemplo 6: Por el método de operadores, resolver la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 4e^x$

En formato de operador: $(m^2 - 7m + 10)\, y = 4e^x$

Las raíces de la ecuación: $m^2 - 7m + 10 = 0$ $m_1 = -2$ $m_2 = -5$

Función complementaria: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-5x}$, luego la integral particular:

$u(x) = \frac{1}{(D+5)}\frac{1}{(D+2)}4e^x = e^{-5x}\int e^{5x}.(e^{-2x}.\int e^{2x}.e^{4x}.dx).dx = e^{-5x}\int e^{5x}.(e^{-2x}.4\int e^{3x}.dx).dx$

Se resuelve $\int e^{3x}.dx$ $t = 3x$ $dt = 3.dx$, luego: $\frac{dt}{3} = dx$, $\int e^t\frac{dt}{3} = \frac{e^{3x}}{3} + C$

$u(x) = e^{-5x}.4\int e^{5x}.e^{-2x}.\frac{e^{3x}}{3}.dx = e^{-5x}\,4.\int\frac{e^{6x}}{3}.dx = 4e^{-5x}.\frac{e^{6x}}{6} = 2\frac{e^x}{9}$

Solución general: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-5x} + 2\frac{e^x}{9}$

Ejemplo 7: Resolver la ecuación homogénea o reducida: $2y'' - 5y' + 2y = 0$

- La ecuación auxiliar es $2m^2 - 5m + 2 = 0$ o $(2m-1)(m-2) = 0$ de modo que $m = 1/2, 2$. Entonces, la solución general es $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{2x}$
- $(2D^3 - D^2 - 5D - 2)y = 0$, su ecuación auxiliar es $2m^3 - m^2 - 5m - 2 = 0$ o también $(2m+1)(m+1)(m-2) = 0$ sus raíces son $m = -\frac{1}{2}$., -1, 2; la solución es $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Ejemplo 8: Resolver $\dfrac{1}{D^3 + D^2 + 2D - 1}\cos 2x$

Podemos demostrar que D^2 se puede reemplazar formalmente por $-2^2 = -4$:

$$\frac{1}{D^3 + D^2 + 2D - 1}\cos 2x = \frac{1}{D(-4) - 4 + 2D - 1}\cos 2x = \frac{-1}{2D + 5}\cos 2x =$$

$$= -\frac{(2D-5)}{4D^2 - 25}\cos 2x = -\frac{(2D-5)}{4(-4) - 25}\cos 2x = \frac{1}{4}(2D-5)\cos 2x = \frac{1}{41}(-4\,\mathrm{sen}\,2x - 5\cos 2x)$$

Ejemplo 9: Resolver $(D^3 + D)y = e^{-2x}\cos 2x$

$$\frac{1}{D^3 + D}\left(e^{-2x}\cos 2x\right) = e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^3 + D - 2}\cos 2x$$

$$= e^{-2x}\frac{1}{D^3 - 6D^2 + 13D - 10} = e^{-2x}\frac{1}{-4D + 24 + 13D - 10}\cos 2x$$

$$= e^{-2x}\frac{1}{9D + 14}\cos 2x = e^{-2x}\frac{9D - 14}{81D^2 - 196}\cos 2x$$

$$= \frac{e^{-2x}}{81(-4) - 196}(9D - 14)\cos 2x = \frac{e^{-2x}}{260}(9\,\mathrm{sen}\,2x + 7\cos 2x)$$

Puesto que la solución complementaria es $c_1 + c_2\cos x + c_3\,\mathrm{sen}\,x$, la solución general buscada es:

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\,\mathrm{sen}\,x + \frac{e^{-2x}}{260}(9\,\mathrm{sen}\,2x + 7\cos 2x)$$

Ejemplo 10: Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Escrito en formato operador $(D^2 - 3D + 2)y = 0$ $\qquad m^2 - m + 2 = 0$

Las raíces: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3) - 4.1.2}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} =$; → $m_1 = 2$; $m_2 = 1$

Función complementaria $y = (c_1e^x + c_2e^{2.x})$

Integral particular: $u(x) = \frac{1}{(D-2)}.\frac{1}{(D-1)}.0$ $\quad$ u(x) = 0

Solución General: $y = c_1e^x + c_2e^{2.x} + 0$

Ejemplo 11: **Resolver** $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x$

En formato operador $(D^2 - D)y = 2x$ $\qquad m^2 - m = 2x$

Calculo las raíces: $m^2 - m = 0 \quad \Rightarrow \quad m(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0;\ m_2 = 1$

Funcion complementaria $y = (c_1e^0 + c_2e^x) = c_1 + c_2e^x$

Integral Particular

$$u(x) = \frac{1}{(D-2)}.\frac{1}{(D-1)}.0.->u(x) = \frac{1}{(D-1)}.\left(e^{-0x}\int e^{0x}.2.dx\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{(D-1)}.\left(2\int dx\right).->u(x) = \frac{1}{(D-1)}.2x.dx..->u(x) = 2e^x\int e^{-x}x.dx$$

Aplico una sustitución:

$dv = e^{-x}$ $\qquad u(x) = x$

$v = -e^{-x}$ $\qquad du = dx$

Queda: $u(x) = -2x - 2 + c$

Solución general: $y = c_1 + c_2e^x - 2x - 2 + c$

DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN AUXILIAR DE RAIZ "n"

Supuesto que todas las raíces m_i son distintas, hallaremos que $y = c_1 e^{m_1 .x} + c_2 e^{m_2 .x} + ... + c_n e^{m_n .x}$ es la solución general de (D - m_1)(D - m_2)... (D - m_n)y = 0.

1. Si la ecuación $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$ la escribimos como operadores, obtendremos $\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + ... + a_{n-1} D + a_n\right)$ y = 0

2. Factorizando el operador diferencial $\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + ... + a_{n-1} D + a_n\right)$ y = 0, podemos expresarla como (D - m_1)(D - m_2)...(D - m_n) y = 0

3. Las **n** ecuaciones lineales homogéneas de 1° orden: (D - m_1)y = 0; (D - m_2) y = 0;...

   (D - m_n) y = 0 tienen por solución a $y_1 = e^{m_1 .x}; y_2 = e^{m_2 .x},..y_n = e^{m_n .x}$, obtenidas cada una del símbolo (D – m)y = $\frac{dy}{dx}$ - m.y;

   Obtenemos las mismas soluciones que para $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$, pero por un método distinto.

4. Si algunas de las raíces m_i resultasen iguales, el número de constantes arbitrarias c_i de $y = c_1 e^{m_1 .x} + c_2 e^{m_2 .x} + ... + c_n e^{m_n .x}$ sería menor que **n** y la solución dada, no sería la solución general.

Ejemplo 12: Supongamos que la ecuación $\frac{.d^{2.} y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$

1. Si su ecuación auxiliar tiene una raíz doble, por ejemplo $m_1 = m_2 = m$, esta ecuación podemos escribirla como $(D - m).(D - m)y = 0$

2. Si hacemos $(D - m)y$ = v, la ecuación $(D - m).(D - m)y = 0$ quedará como $(D - m)v = 0$ y su solución será $v = c_1 e^{m.x}$.

3. Reemplazo $v = c_1 e^{m.x}$ en (D - m) y = v → (D - m) y = $c_1 e^{m.x}$ que es ecuación lineal, cuya solución es: $\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + ... + a_{n-1} D + a_n\right)$ y = 0; así logramos $y = e^{m.x}(c_2 + c_1 x)$

4. Por analogía establecemos que si la ecuación auxiliar tiene una raíz "m" cuyo orden de multiplicidad sea "r" la solución correspondiente a esa raíz será: $y = e^{m_i .x}(c_1 + c_2 x + ... + c_r x^{r-1})$

Ejemplo 14: **Resolver** $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 4e^x$

$m^2 - 7m + 10 = 0$

$m_1 = 5$

$m_2 = 2$

Función complementaria: $Y(x) = c_1e^{5x} + c_2e^{2x}$

Integral particular: $u(x) = \frac{1}{D-2}\frac{1}{D-5}4e^x$

-Método de Iteración:

$$u(x) = e^{2x}\int e^{-2x}\left(e^{5x}\int e^{-5x}e^x 4dx\right)dx$$

$$u(x) = 4e^{2x}\int e^{-2x}e^{5x}\frac{e^{-4x}}{-4}dx$$

$$u(x) = e^{2x}e^{-x} = e^x$$

-Fracciones parciales: $u(x) = \frac{A}{D-2}4e^x + \frac{B}{D-5}4e^x$

$\frac{1}{(D-2)(D-5)} = \frac{A}{D-2} + \frac{B}{D-5}$

$1 = A(D-5) + B(D-2)$

$1 = AD - 5A + BD - 2B$

$1 = (A+B)D + (-5A - 2B)$

$A + B = 0$

$-5A - 2B = 1$

$A = -1/3$

$B = 1/3$

$u(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{D-2}4e^x + \frac{1}{3}\frac{1}{D-5}4e^x$

$u(x) = -\frac{4}{3}e^{2x}\int e^{-2x}e^x dx + \frac{4}{3}e^{5x}\int e^{-5x}e^x dx$

$u(x) = -\frac{4}{3}e^{2x}\frac{e^{-x}}{-1} + \frac{4}{3}e^{5x}\frac{e^{-4x}}{-4}$

$u(x) = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^x = e^x$

Solución General: $y(x) = c_1e^{5x} + c_2e^{2x} + e^x$

Ejemplo 15: **Resolver** $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 7y = 2e^x$

$m^2 - 8m + 7 = 0$

$m_1 = 7$

$m_2 = 1$

Función complementaria: $Y(x) = c_1 e^{7x} + c_2 e^x$

Integral particular: $u(x) = \frac{1}{D-7}\frac{1}{D-1}2e^x$

-Método de Iteración:

$u(x) = e^{7x}\int e^{-7x}\left(e^x \int e^{-x}2e^x dx\right)dx$

$u(x) = 2e^{7x}\int e^{-7x}e^x x dx$

$u(x) = 2e^{7x}\int e^{-6x} x dx$

$u = x; du = dx$

$dv = e^{-6x}dx; v = \frac{e^{-6x}}{-6}$

$u(x) = 2e^{7x}\left[-1/6xe^{-6x} + 1/6\int e^{-6x}dx\right]$

$u(x) = 2e^{7x}\left[-1/6xe^{-6x} - 1/36e^{-6x}\right]$

$u(x) = -1/3xe^x - 1/18e^x$

-Método de Fracciones parciales:

- $u(x) = \frac{A}{D-1}2e^x + \frac{B}{D-7}2e^x$

$\frac{1}{(D-1)(D-7)} = \frac{A}{D-1} + \frac{B}{D-7}$

$1 = A(D-7) + B(D-1)$

$1 = AD - 7A + BD - B$

$1 = (A+B)D + (-7A - B)$

$A + B = 0$

$-7A - B = 1$

$A = -1/6$

$B = 1/6$

$$u(x) = -\frac{1}{6}\frac{1}{D-1}2e^x + \frac{1}{6}\frac{1}{D-7}2e^x$$

$$u(x) = -\frac{1}{3}e^x \int e^{-x}e^x dx + \frac{1}{3}e^{7x}\int e^{-7x}e^x dx$$

$$u(x) = -\frac{1}{3}e^x x + \frac{1}{3}e^{7x}\frac{e^{-6x}}{-6}$$

$$u(x) = -\frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{18}e^x$$

Solución General: $Y(x) = c_1 e^{7x} + c_2 e^x - \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{18}e^x$

Ejemplo 16: Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{4.x}$

Escribiendo simbólicamente: $(D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$ Factoreando (D - **3**)(D – **2**) y = e^{4x}

a) Por el método de iteración

1. La integral particular será: $y = \frac{1}{(D-3).(D-2)}.e^{4.x} = \frac{1}{(D-3)}\frac{1}{(D-2)}e^{4x}$

2. Como: $\frac{1}{D+a}f(x) = e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)} dx$; y como: $f(x) = \mathbf{e^{4.x}}$

   Será: $\frac{1}{(D-2)}\mathbf{e^{4x}} = e^{-(-2).x}\int e^{(-2).x} e^{4x} dx = e^{2.x}\int e^{2x} dx$

   Por tanto reemplazando $e^{2.x}\int e^{2x} dx$, en el paso 1, queda: $y = \frac{1}{(D-3)} e^{2.x}\int e^{2x} dx$

   O sea que: $f(x) = \mathbf{e^{2.x}\int e^{2x} dx}$

3. Activando el segundo operador volvemos a aplicar: $y = \frac{1}{D+a}f(x) = e^{-ax}\int e^{ax} f_{(x)} dx$

   $y = \frac{1}{D+(-3)} f_{(x)} = \frac{1}{D-3} f_{(x)} = e^{-(-3)..x}\int(e^{(-3)x}\, \mathbf{e^{2.x}\int e^{2x} dx})dx = e^{3.x}\int(e^{-x}\int e^{2x} dx)\, dx$

   $y = e^{3.x}\int(e^{-x}\frac{e^{2x}}{2})\, dx = e^{3.x}\int(\frac{e^x}{2})\, dx = \frac{e^{3x}}{2}\int e^x dx = \frac{e^{3x}}{2}e^x = \frac{e^{4x}}{2}$

b) Por el método de fracciones parciales:

1. Como: $y = \frac{1}{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n} f_{(x)} =$

   $\left[\frac{A_1}{(D-m_1)} + \frac{A_2}{(D-m_2)} + ... + \frac{A_n}{(D-m_n)}\right] f_{(x)}$

   $y = \frac{1}{(D-3)}\frac{1}{(D-2)}e^{4x} = \frac{1}{(D-3)}e^{4x} + \frac{1}{(D-2)}e^{4x}$

   $y = \frac{1}{(D-3).(D-2)}.e^{4.x}$ donde: $\frac{1}{(D-3).(D-2)} = \frac{A_1}{(D-3)} + \frac{A_2}{(D-2)}$

2. Del operador $.y=\dfrac{1}{D-3}e^{4.x}-\dfrac{1}{D-2}e^{4.x}$, $y=e^{3.x}\int e^{-3.x}e^{4.x}dx-e^{2.x}\int e^{-2.x}e^{4.x}dx..yP=\dfrac{e^{4.x}}{2}$

Aplico: $\dfrac{1}{D+a}f(x) = e^{-ax}\int e^{ax}\ f_{(x)}\,dx$

- $\dfrac{1}{D+(-3)}\mathbf{e^{4x}} = e^{-(-3)x}\int e^{-3x}\ \mathbf{e^{4x}}\,dx = e^{3x}\int e^{x}\,dx = e^{3x}e^{x} = e^{4x}$
- $\dfrac{1}{(D-2)}e^{4x} = e^{-(-2)x}\int e^{-2x}\ \mathbf{e^{4x}}\,dx = e^{2x}\int e^{2x}\,dx = e^{3x}e^{x} = e^{2x}\dfrac{e^{2x}}{2}=\dfrac{e^{4x}}{2}$

Si (D^2-5D+6) es $m^2-5m+6=0$, luego resolviendo esta ecuación de segundo grado, sus raíces serán $\dfrac{5\pm1}{2}\Rightarrow m_1=2, m_2=3$ así la **función complementaria** será $c_1e^{3.x}+c_2e^{2.x}$ y por lo tanto la **solución general será** $y=\dfrac{e^{4.x}}{2}$ y + $c_1e^{3.x}+c_2e^{2.x}$

Ejemplo 17: **Resolver** $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+3=e^{2x}$ **Formato operador** $(D^2-4D+3)y=e^{2x}$

$m^2-4m+3=e^{2x}$

Las raices: $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)-4.1.3}}{2.1}=\dfrac{4\pm2}{2}=$ **Raices:** $m_1=3$; $m_2=1$

Funcion complementaria: $y=(c_1e^{x}+c_2e^{3.x})$

Integral Particular: $u(x)=\dfrac{1}{(D-3).(D-1)}.e^{2x}$ $\qquad u(x)=\dfrac{1}{(D-3)}.\left(e^{x}\int e^{-x}e^{2x}.dx\right)$

$u(x)=\dfrac{1}{(D-3)}.\left(e^{x}\int e^{x}.dx\right) \rightarrow u(x)=\dfrac{1}{(D-3)}.\left(e^{x}.e^{x}\right) \rightarrow u(x)=.\left(e^{3x}\int e^{-3x}e^{2x}.dx\right)\rightarrow$

$u(x)=.\left(e^{3x}\int e^{-x}.dx\right) \qquad u(x)=e^{3x}.-e^{-x}+c \qquad u(x)=-e^{2x}+c$

Fracción Parcial: $u(x)=\dfrac{1}{(D-3).(D-1)}.f_{(x)}=\left(\dfrac{A_1}{(D-3)}+\dfrac{A_2}{(D+1)}\right).f_{(x)}=\dfrac{1}{(D-3)}.e^{2x}+\dfrac{1}{(D-1)}.e^{2x}$

$u(x)=e^{3x}\int e^{-3x}e^{2x}dx-e^{x}\int e^{-x}e^{2x}dx \rightarrow u(x)=e^{3x}\int e^{-x}dx-e^{x}\int e^{x}dx \rightarrow u(x)=e^{3x}.-e^{-x}-e^{x}+c$

$u(x)=-e^{2x}+c$

Solucion general: $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}-e^{2x}+c$

Ejemplo 18: **Resolver** $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 5 = 0$

Formato operador $(D^2 - 6D + 5)y = 0$ $\quad m^2 - 6m + 5 = 0$

Calculo las raíces: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6) - 4.1.5}}{2.1} = \frac{6 \pm 4}{2} =$ **raíces →** $m_1 = 5 \quad m_2 = 1$

Función complementaria: $y = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$

Método de iteración: $u(x) = \frac{1}{(D-5).(D-1)}.0$

$$u(x) = \frac{1}{(D-5)}.\left(e^x \int e^{-x}.0.dx\right)$$
$$u(x) = 0$$

Método de Fracción Parcial: $u(x) = \frac{1}{(D-5).(D-1)}.f_{(x)} = \left(\frac{A_1}{(D-5)} + \frac{A_2}{(D+1)}\right).f_{(x)}$

$$= \frac{1}{(D-5)}.0 + \frac{1}{(D-1)}.0$$
$$u(x) = 0$$

Solución General $\quad y = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$

Ejemplo 19: **Resolver** $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 54y = 0$

$m^2 + m - 54 = 0$ cuyas raíces son**:** $m_1 = 6$ **y** $m_2 = -9$

Función complementaria: $Y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-9x}$

Integral particular:

- método de iteración.

$$u(x) = \frac{1}{(D-6)(D+9)}0 = 0$$

-

-método de fracciones parciales.

$$u(x) = \frac{1}{(D-6)(D+9)}0 = \left[\frac{A}{D-6} + \frac{B}{D+9}\right]0 = 0$$

Solución general: $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-9x}$

Ejemplo 20: **Resolver** $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^{-x}$

$m^3 - m^2 - 2m = 0 \rightarrow m(m^2 - m - 2) = 0$ Raíces: $m_1 = 0$; $m_2 = -1$; $m_3 = 2$

Función complementaria: $Y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Integral particular:

- **Método de iteración**: $u(x) = \frac{1}{(D-2)(D+1)D} e^{-x}$

$$u(x) = e^{2x}\int e^{-2x}\left[e^{-x}\int e^{x}\left(\int e^{-x}dx\right)dx\right]dx \qquad u(x) = e^{2x}\int e^{-2x}\left[e^{-x}\int e^{x}\left(-e^{-x}\right)dx\right]dx$$

$$u(x) = e^{2x}\int e^{-2x}\left[e^{-x}(-x)\right]dx \rightarrow u(x) = e^{2x}\int e^{-3x}(-x)dx \rightarrow u(x) = e^{2x}\left[\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{9}\right]$$

$$u(x) = x\frac{e^{-x}}{3} + \frac{e^{-x}}{9}$$

- **Método de fracciones parciales**: $u(x) = \frac{1}{(D-2)(D+1)D} e^{-x} = \left[\frac{A}{D-2} + \frac{B}{D+1} + \frac{C}{D}\right]e^{-x}$

$$1 = A(D+1)D + B(D-2)D + C(D-1)(D+2)\; 1 = AD^2 + AD + BD^2 - 2BD + CD^2 - CD - C$$

$$1 = (A+B+C)D^2 + (A\ -2B-C)D - 2C$$

$$\begin{cases} -2C = 1 \\ A+B+C = 0 \\ A-2B-C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 1/3 \\ C = -1/2 \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{1}{(D-2)(D+1)D}e^{-x} = \left[\frac{1/6}{D-2} + \frac{1/3}{D+1} - \frac{1/2}{D}\right]e^{-x}$$

$$u(x) = \frac{1}{6}e^{2x}\int e^{-2x}e^{-x}dx + \frac{1}{3}e^{-x}\int e^{x}e^{-x}dx - \frac{1}{2}\int e^{-x}dx$$

$$u(x) = \frac{1}{6}e^{2x}\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) + \frac{1}{3}e^{-x}x + \frac{1}{2}e^{-x} \rightarrow u(x) = \frac{4}{9}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-x}x$$

Ejemplo 21: **Resolver** $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

$m^3 - 3m^2 + 4 = 0$ donde $m_1 = -1$; $m_2 = 2$; $m_3 = 2$

Función complementaria: $Y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{2x}$

$$Y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3)e^{2x}$$

Integral particular:

- Método de iteración: $u(x) = \frac{1}{(D+1)(D-2)(D-2)}0 = 0$

- Método de Fracción parciales $u(x) = \frac{1}{(D+1)(D-2)(D-2)}0 = \left[\frac{A}{D+1} + \frac{B}{D-2} + \frac{C}{D-2}\right]0 = 0$

Si la función f(x) fuese distinta de 0 tampoco podría aplicar el método de fracciones parciales porque hay 2 raíces iguales.

Ejemplo 22: **Resolver** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^{2x}$

$m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m-1)(m-1) = 0 \rightarrow \quad m_1 = 1 \qquad m_2 = 1$

Función complementaria: $Y = c_1 e^x + c_2 e^x$

Fracción Particular: $u(x) = \dfrac{1}{(D-1)} \dfrac{1}{(D-1)} e^{2x}$

-Método de Iteración: $e^x \int e^{-x} \left[e^x \int e^{-x} e^{2x} dx \right] dx \rightarrow e^x \int e^{-x} \left[e^x e^x \right] dx = e^x \int e^x dx = e^{2x}$

-Método de fracciones parciales: $u(x) = \left[\dfrac{A}{(D-1)} + \dfrac{B}{(D-1)} \right] = \dfrac{1}{(D-1)(D-1)}$

$A(D-1) + B(D-1) = 1$

$AD - A + BD - B = 1$

$D(A+B) - (A+B) = 1$

$A + B = 0$

$A = -B$

$-B + B = 1$

No se puede resolver por el método de fracciones parciales por ser las Raíces iguales

Solución general: $y = c_1 e^x + c_2 e^x$

Ejemplo 23: $\dfrac{1}{D-2}\left(e^{4x}\right)$

- **Método 1**: Sea $\dfrac{1}{D-2} e^{4x} = y$. Por definición tenemos que, $(D-2)y = e^{4x}$ o $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{4x}$

  Resolvemos esta como ecuación lineal de primer orden, con el factor de integración e^{-2x},

  así obtenemos $y = \dfrac{1}{2} e^{4x} + ce^{2x}$. La solución particular será, $\dfrac{1}{D-2} e^{4x} = \dfrac{1}{2} e^{4x}$

- **Método 2:** $\dfrac{1}{D-2} e^{4x} = e^{2x} \int e^{-2x} e^{4x} dx = e^{2x} \int e^{2x} dx = \dfrac{1}{2} e^{4x}$

PROPIEDADES DE LOS OPERADORES

1. Probar la ley conmutativa de la multiplicación en operadores

- Se cumple si tienen coeficientes constantes.
- No se cumplen si no tienen coeficientes constantes.

$$\left(D^2+3D+2\right)\cdot e^{4x} = D^2e^{4x}+3De^{4x}+2e^{4x} = 16e^{4x}+12e^{4x}+2e^{4x} = 30e^{4x}$$

$$\left(D^2+3D+2\right)\cdot e^{4x} = (D+2)\cdot(D+1)\cdot e^{4x} = (D+1)\cdot(D+2)\cdot e^{4x}$$

$$(D+2)\cdot(D+1)\cdot e^{4x} = (D+2)\cdot\left(De^{4x}+e^{4x}\right) = (D+2)\cdot\left(4e^{4x}+e^{4x}\right) = (D+2)\cdot\left(5e^{4x}\right) = 30e^{4x}$$

$$(D+1)\cdot(D+2)\cdot e^{4x} = (D+1)\cdot\left(De^{4x}+2e^{4x}\right) = (D+1)\cdot\left(4e^{4x}+2e^{4x}\right) = (D+1)\cdot\left(6e^{4x}\right) = 30e^{4x}$$

2. Demostrar que los operadores $xD+1$ y $D-2$ no son conmutativos con respecto a la multiplicación.

$$(xD+1)\cdot(D-2)\cdot y = (xD+1)\cdot(y'-2y) = xD(y'-2y)+(y'-2y) = xy''-2xy'+y'-2y$$

$$(D-2)\cdot(xD+1)\cdot y = (D-2)\cdot(xy'+y) = D(xy'+y)-2(xy'+y) = xy''-2xy'+2y'-2y$$

Entonces $(xD+1)(D-2)y \neq (D-2)\cdot(xD+1)y$ y queda demostrado el resultado buscado.

3. Demostrar que $D, D^2, D^3, \ldots,$ son operadores lineales.

$$D(Au+Bv) = \frac{d}{dx}(Au+Bv) = A\frac{du}{dx}+B\frac{dv}{dx} = ADu+BDv$$

Sí D es operador lineal, podemos demostrar que $D^2, D^3, \ldots,$ son operadores lineales.

4. Demostrar que $\varnothing(D) = a_{0(x)}D^n + a_1(x)D^{n-1}+\ldots+a_n(x)$ es un operador lineal.

$$\varnothing(D)[Au+Bv] = \left(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_n\right)[Au+Bv] = a_0D^n[Au+Bv]+\ldots+a_n[Au+Bv]$$

$$= \left(Aa_0D^nu+Ba_0D^nv\right)+\ldots+\left(Aa_nu+Ba_nv\right) = A\left(a_0D^n+\ldots+a_n\right)u+B\left(a_0D^n+\ldots+a_n\right)v$$

$A\varnothing(D)u+B\varnothing(D)v$ Y por tanto, $\varnothing(D)$ es un operador lineal.

5. Demostrar que, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación $\varnothing(D)y=0$ entonces $c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$ es también una solución; si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

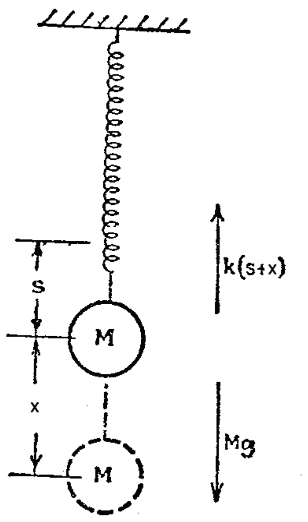
Tenemos que $\varnothing(D)y_1 = 0,\ \ \varnothing(D)y_2 = 0, \ldots, \varnothing(D)y_n = 0$

Por el problema anterior:

$$\varnothing(D)\left[c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n\right] = c_1\varnothing(D)y_1+c_2\varnothing(D)y_2+\ldots+c_n\varnothing(D)y_n = 0$$

Y, por tanto, $c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$ es una solución.

APLICACIÓN: AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



Calcular la posición del extremo de un resorte en forma de hélice para cada instante t; el resorte está colocado en medio resistente donde la fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad. Esta clase de amortiguamiento es el amortiguamiento viscoso.

El medio resistente se opone al desplazamiento, la fuerza amortiguadora **r** $\frac{dx}{dt}$ actúa en sentido opuesto al del desplazamiento de una masa **M**, aplicada al extremo del resorte que produce una elongación **s** que, de acuerdo a la ley de Hooke, es proporcional a la fuerza aplicada: **F = k s**.

Donde:

F = M g según la segunda ley del movimiento y **k** representa la dureza del resorte. Así: **M g = k s**.

Si en un instante posterior **t** se aplica una fuerza adicional se produce un alargamiento y después de esa fuerza adicional se suprime el resorte retrocederá, oscilando.

Determinar la posición del extremo del resorte en cada instante subsiguiente t.

Las fuerzas que actúan sobre la masa M son la fuerza de la gravedad Mg que obra hacia abajo, sentido que se toma como positivo al considerar el desplazamiento x, la tensión T del resorte que actúa en sentido opuesto y puesto que el medio resistente se opone al desplazamiento, la fuerza amortiguadora r $\frac{dx}{dt}$ actúa en sentido opuesto al del desplazamiento de la masa M.

Según la segunda ley del movimiento de Newton:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - T - r\frac{dx}{dt}$$

Como **T** es la tensión del resorte cuando la elongación es **s + x**, la ley de Hooke establece:

T = k(s+x), es decir:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - k(x+s) - r\frac{dx}{dt}$$

.**k** = constante del resorte
.**x** = desplazamiento de la masa
.**s** = elongación

Como: **M g = k s** → $a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$

Donde:

a, b , c son constantes cuyos valores son: **a =1**; **b=2** ;**c=5**

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx \quad = 0 \rightarrow a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}=-cx \rightarrow f(x)=-cx$$

- En formato operador: $\left(a\cdot m^2+b\cdot m\right)\cdot y=0 \rightarrow \left(m^2+2\cdot m\right)\cdot y=0$
- Las raíces de la ecuación auxiliar son: $m_1=1$ $\qquad m_2=2$
- Función Complementaria: $y=c_1\cdot e^{m_1\cdot x}+c_2\cdot e^{m_2\cdot x}+\ldots+c_n\cdot e^{m_n\cdot x} \rightarrow y=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{2x}$
- Integral Particular:

$$u(x)=\frac{1}{(D-m_1)}\cdot\frac{1}{(D-m_{n-1})}\cdot f(x) \quad \rightarrow u(x)=\frac{1}{(D-1)}\cdot\frac{1}{(D-2)}\cdot-5x$$

De las relaciones: $u(x)=\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)dx$

$$u(x)=\frac{1}{(D+a)}\cdot f(x)=e^{-a\cdot x}\cdot\int e^{a\cdot x}\cdot f(x)\cdot dx$$

Calculamos:

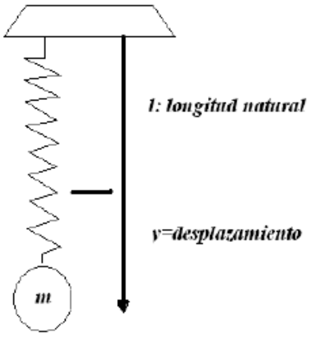
$$u(x)=e^{2x}\cdot\frac{e^{2x}}{2}\cdot\left(5x-\frac{1}{2}\right)+e^x\cdot e^x\cdot(5x-1)\rightarrow u(x)=e^{2\cdot x}\cdot\int e^{2\cdot x}\cdot-5x\cdot dx+e^x\cdot\int e^x\cdot 5x\cdot dx$$

$$u(x)=-\frac{5x}{2}-\frac{1}{4}+5x-1 \quad \rightarrow \quad u(x)=\frac{10x-5}{4}$$

Solución General: $Y=y+u(x) \rightarrow Y=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{2\cdot x}+\dfrac{10x-5}{4}$

APLICACIÓN: MOVIMIENTO NO AMORTIGUADO

Supóngase que un peso de 4 libras estira un muelle, desde su posición natural, en 8 pulgadas. Si se estira el muelle hacia abajo otras 6 pulgadas y se suelta con una velocidad inicial hacia arribe de 8 pies por segundo, hallar la fórmula para la posición del peso en función del tiempo *t* y la posición y para un tiempo de 3 segundos.



Datos: L: longitud natural
Y: desplazamiento
Peso (W)= 4 libras
Posición natural = 8 pulgadas
Se estira = 6 pulgadas
Velocidad inicial = 8 pies/segundo
Tiempo = 3 segundos
G = 32 pies/segundo2

El movimiento de una masa oscilante es llamado movimiento armónico simple.
El movimiento de un oscilador armónico simple esta dada por Ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

Recordemos que un sistema cualquiera de masa m sobre el cual obre una fuerza F=- k.x , se regirá por esta ecuación, conocida como la Ley de Hooke.
En nuestro caso estamos igualando la relación de Hooke, con el peso de la masa:

$$F=-k.x$$

$$W=-k.x \rightarrow 4lb=-k.8pu\lg$$

$$\frac{4lb}{8pu\lg}=k \rightarrow k=0{,}5\frac{lb}{pu\lg}\cdot\frac{12pu\lg}{6pie} \rightarrow \boxed{k=6\frac{lb}{pie}}$$

Además w viene dado por $W=m.g$, se sigue que $m=\frac{w}{g}$ → m= 4/32 = 1/8.

Por lo tanto la ecuación diferencial resultante para el movimiento no amortiguado es

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{6}{1/8}x=0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+48x=0 \rightarrow y''+48x=0$$

Reescribiendo $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

La **posición** del móvil que describe un M.A.S. en función del tiempo es: $x=A\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$

Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la **velocidad** del móvil

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

Derivando de nuevo respecto del tiempo, obtenemos la **aceleración** del móvil

$$a=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\cdot sen(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x$$

Este resultado se suele expresar en forma de ecuación diferencial: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

Que es la ecuación d MAS donde *x* puede ser cualquier magnitud: un desplazamiento lineal, un desplazamiento angular, la carga de un condensador, una temperatura, etc.

Puede comprobarse que la solución de esta ecuación diferencial es: $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

Condiciones iniciales: Para la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 en el instante $t=0$.

$x_0 = A \cdot \operatorname{sen}\varphi$
$v_0 = A\omega \cdot \cos\varphi$

se determinan la amplitud *A* y la fase inicial φ

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$