MATEMATICA SUPERIOR APLICADA

Wilo Carpio Cáceres

2013

A mis queridos hijos . . .

El rol trascendente de las transformadas de Laplace es simplificar las soluciones de ecuaciones diferenciales, en sus múltiples aplicaciones en el campo de la electricidad, la mecánica, la dinámica y en general dentro de la física e ingeniería.

TRANSFORMADA DE LAS INTEGRALES:

Se define la **función transformada** $F_{(s)}$ como una integral de la función original $f_{(x)}$ multiplicada por alguna función arbitraria de las variables **x** y **s** denominada **Núcleo de la transformación**:

$$F_{(s)} = \int_0^\infty K_{(s.x)}\, f_{(x)}\, dx$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE $\mathcal{L}\{f_{(t)}\}$ **de la función** $f_{(t)}$, para todo $t > 0$, es un tipo de transformada de integrales definida como:

$$\mathcal{L}\{f_{(t)}\} = L\{f_{(t)}\} = F_{(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f_{(t)}\, dt$$

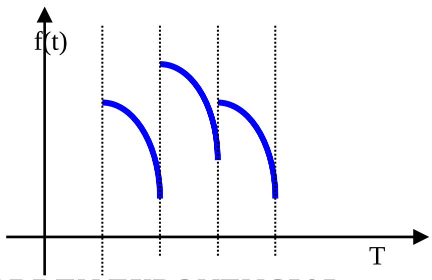
Donde, **s**: Parámetro real y si la integral: $\int_0^\infty e^{-st} f_{(t)}\, dt$, es:

- **Convergente:** La integral y la transformada $\mathcal{L}\{f_{(t)}\}$ existen, en un "Rango de Convergencia o de Existencia" S_o y S.
- **Divergente:** No existen ni integral ni la transformada $\mathcal{L}\{f_{(t)}\}$.

CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para que exista $\mathcal{L}\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ es necesario que la función $f_{(t)}$ cumpla con los requisitos:

1. **CONTINUIDAD A TROZOS:** La función $f_{(t)}$ en un intervalo es casi continua a trozos, si:



- El intervalo puede dividirse en un número finito de sub intervalos, en cada una de las cuales $f_{(t)}$ es continua.
- Los límites de $f_{(t)}$ son finitos cuando **t** se aproxima a los extremos de cada intervalo.

2. **ORDEN EXPONENCIAL**

   Si existen dos constantes reales **M** (Coeficiente de transformación) y γ (Variable de ajuste), tal que $M > 0$, para todo $t > N$, resulta:

$$| e^{-\gamma.t} f(t) | < M, \quad ó \quad | f(t) | < M e^{\gamma.t}$$

   La función $f_{(t)}$ **debe ser de orden exponencial** γ, cuando $t \to \infty$

   Ejemplo: $f_{(t)} = t^2$ es de orden exponencial 3 pues, $| t^2| = t^2 < e^{3.t}$, para todo $t > 0$

3. **TEOREMA:**

Si $f_{(t)}$ es una función continua a trozos en todo intervalo finito para $0 \le t \le T$ y si además tal función es de orden exponencial para $t < T$, entonces existe la transformada de la Laplace $\mathcal{L}\{ f_{(t)} \}$ de la función $f_{(t)}$ para valores $s > \gamma$

Demostración:

- Separando el intervalo de integración de: $\mathcal{L}\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$,

  en el segundo miembro las expresiones parciales de las integrales: $\mathcal{L}\{ f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt + \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$
- En la integral: $\int e^{-st} f_{(t)}\, dt$, como $f_{(t)}$ es continua a trozos para $0 \le t \le T$, también lo será $e^{-st} f_{(t)}$, de manera que esta primera integral $\int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ existe.
- Para demostrar que la segunda integral $\int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ también existe, recurrimos a la segunda condición para la existencia de la transformada, que dice que $| f_{(t)} | \le M e^{-\alpha t}$
- A $|\int e^{-st} f_{(t)}\, dt|$ la escribimos como $\int e^{-st} | f_{(t)} | dt$, y reemplazamos: $| f_{(t)} | \le M e^{-\alpha t}$
- Así obtenemos $\int e^{-st} M e^{-\alpha t}\, d(t)$, que al resolver nos dará: $\int_T^\infty e^{-(s-a)}\, d(t) = \dfrac{M}{s-a}$
- Si $s > \alpha$ demuestra el resultado buscado

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS

1. PROPIEDAD DE LINEALIDAD

1.1.- LINEALIDAD DEL OPERADOR $\mathcal{L}$: Sean dos constantes c_1 y c_2 y dos funciones cualesquiera $f_{1(t)}$ y $f_{2(t)}$; el operador $\mathcal{L}$ de la transformada de Laplace es un OPERADOR LINEAL si cumple con la condición:

$$\mathcal{L}\{ c_1 f_{1(t)} + c_2 f_{2(t)} \} = c_1 \mathcal{L}\{ f_{1(t)} \} + c_2 \mathcal{L}\{ f_{2(t)} \}$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\{4t^2 - 3\text{Cos } 2t + 5 e^{-t} \} = 4L\{ t^2\} - 3L\{\text{Cos } 2t\} + 5L\{ e^{-t} \} = 4\{ \frac{2.!}{s^3} \} - 3\{ \frac{s}{s^2+4} \} + 5\{ \frac{1}{s+1} \}$$

Demostración:

- Reemplazo $f_{(t)} = \{c_1 f_1 (t) + c_2 f_2 (t)\}$ en $\mathcal{L}\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$
- Obtengo $\mathcal{L}\{ f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt = \int e^{-st} \{ c_1 f_1 (t) + c_2 f_2 (t) \}\, dt$
- Opero corchetes $\mathcal{L}\{ f_{(t)}\} = c_1\int e^{-st} f_1 (t)\, dt + c_2\int e^{-st} f_2 (t)\, dt$
- Aplico la definición $\mathcal{L}\{ f_{(t)}\} = \int e^{-st} f(t)\, dt \rightarrow \mathcal{L}\{ f_{(t)}\} = c_1 \mathcal{L}\{ f_{1(t)}\} + c_2 \mathcal{L}\{ f_{2(t)}\}$

1.2.- LINEALIDAD DEL OPERADOR $\mathcal{L}^{-1}$: Sean dos constantes c_1 y c_2 y dos funciones cualesquiera $f_1 (t)$ y $f_2(t)$; el operador L^{-1} de la transformada inversa de Laplace es un operador lineal si cumple con la condición:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1 (s) + c_2F_2 (s) \} = c_1f_1 (s) + c_2f_2 (s)$$

Demostración:

- Por definición: $\mathcal{L}^{-1}\{ c_1F_1 (s) + c_2F_2 (s) \} = c_1f_1 (s) + c_2f_2 (s)$
- Opero el primer miembro: $\mathcal{L}^{-1}\{ c_1F_1 (s) + c_2F_2 (s) \}= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1 (s) \}+ c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2 (s) \}$
- Y como $\mathcal{L}^{-1}\{ F(s) \} = f(s)$ también será: $L^{-1}\{ F_1 (s) \} = f_1 (s)$ y $L^{-1}\{ F_2 (s) \} = f_2 (s)$
- Finalmente: $\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1 (s) + c_2F_2 (s) \} = c_1f_1 (s) + c_2f_2 (s)$

2. PROPIEDAD DE TRASLACION

2.1.- **Primera propiedad de traslación: L{ e^{at} $f_{(t)}$ } = F(s - a)**

- Multiplicando ambos miembros de L{f(t)} = ∫e^{-st} f(t) dt por: e^{at}, tendremos:
- L{ e^{at} f(t) } = ∫e^{-st} [e^{at} f(t)] dt = $\int_0^\infty e^{-(s-a)t}$ f(t) dt = F(s - a)

Ejemplo: Para: L| Cos 2t | = $\frac{s}{s^2+4}$; será: L| $\mathbf{e^{at}}$ Cos 2t | = $\frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$

2.2.- **Segunda propiedad de traslación: L| $g_{(t)}$| = e^{-as} F(s)**

Si: L|f(t)| = F(s) y g(t) = (f(t-a) para t > a ó, g(t) = 0 para t < a, obtenemos el Segundo teorema de traslación: **L|g(t)| = e^{-as} F(s)**

Ejemplo: L{t^3}= $\frac{3.!}{s^4}$ = $\frac{6}{s^4}$, luego la transformada de g(t) = $6^{\frac{-2s}{s^4}}$

Aplicando el mismo criterio para la transformada inversa de Laplace tendremos:

- Si L^{-1}{ $\mathbf{F_{(t)}}$ } = $\mathbf{f_{(t)}}$ como: L{ e^{at} $\mathbf{f_{(t)}}$ } = F(s - a)
- Será L^{-1}{ F(s - a) } = e^{at} $\mathbf{f_{(t)}}$

3. PROPIEDAD DE CAMBIO DE ESCALA

Si L| $\mathbf{f_{(t)}}$| = F(s) entonces: L| $\mathbf{f_{(a.t)}}$| = $\frac{1}{a}$ F($\frac{s}{a}$)

Ejemplo: L|Sen t| = $\frac{1}{s^2+1}$, luego L|Sen 3t| = $\frac{1}{3}\,\frac{1}{(\frac{s}{3})^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$

METODOS DE CÁLCULO de la L :

A. DIRECTO: Aplicando la definición: L $\{f_{(t)}\} = L\{f_{(t)}\} = F_{(s)} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$

Ejemplos: Determinar la L para la función:

1.- $f_{(t)} = e^{\alpha t}$

- Reemplazado en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ el valor de $f_{(t)} = e^{\alpha t}$
- $L\{e^{\alpha t}\} = \int e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$ para $s - a > 0$:. $s > a$

2.- $f_{(t)} =$ Sen wt

- Reemplazado en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ el valor de $f_{(t)} =$ Sen wt
- $L\{\text{Sen } wt\} = \int e^{-st} \text{ Sen } wt\, dt = \left[\frac{-s(senwt).e^{-st} - e^{-st} w.\cos wt}{s^2 + w^2}\right]_0^\infty = \frac{w}{s^2 + w^2}$

3.- $f_{(t)} = e^{i.w.t}$

- Reemplazado en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ el valor de $f_{(t)} = e^{i.w.t}$
- $L\{e^{i.w.t}\} = \int e^{-st} e^{i.w.t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-iw)t}\, dt = \frac{e^{-(s-iw)t}}{s-iw}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-iw}$

4.- $f_{(t)} = \begin{cases} 5 \\ 0 \end{cases}$ para $0 < t < 3$

- Reemplazado en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ el valor de $f_{(t)} = \begin{cases} 5 \\ 0 \end{cases}$ para $0 < t < 3$
- $L\{f_{(t)} = \begin{cases} 5 \\ 0 \end{cases}\} = \int_0^\infty e^{-st}(5)dt + \int_3^\infty e^{-st}(0)dt = 5\int_0^3 e^{-st}dt = \frac{5e^{-st}}{-s}\Big|_0^3 = \frac{5(1-e^{-3s})}{s}$

5.- $f_{(t)} = A\ e^{-at}$

- Reemplazado en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ el valor de $f_{(t)} = A\, e^{-at}$
- $L\{A\, e^{-at}\} = \int e^{-st} A\, e^{-at}\, dt = A \int_0^\infty e^{-(s+a).t}.dt$
- Por sustitución: $u = -(a+s)t\,;\quad du = -(a+s).dt\,;\quad \frac{du}{-(a+s)} = dt \qquad L\{A\, e^{-at}\} = \frac{A}{s+a}$

6.- $f_{(t)} =$ Sen2t + Cos2t

- Reemplazado en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)}\, dt$ el valor de $f_{(t)} =$ Sen2t + Cos2t

 Reemplazando en $L\{f_{(t)}\} = \int e^{-st} f_{(t)} dt$ el valor de $f_{(t)} = sen\omega.t$

 $L\{sen.2.t + \cos 2.t\} = \int e^{-st} sen2.tdt + \int e^{-st} \cos 2.tdt$

$$= \left[\frac{-s(sen2.t).e^{-st} - e^{-st}2\cos 2.t}{s^2 + 2^2} + \frac{-s(\cos 2.t).e^{-st} - e^{-st}2sen2.t}{s^2 + 2^2}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{s^2 - 2^2} + \frac{s}{s^2 + 2^2} = \frac{2+s}{s^2 - 4^2} = \frac{2+s}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s-2}$$

B. **POR TABLAS DE L:** (Otra tabla al final → . . .)

	. $f_{(t)}$	L { f(t) } = F(s)		. $f_{(t)}$	L { f(t) } = F(s)
1	1	$\frac{1}{s}$ s > 0	8	.t Sen at	$\frac{2.a.s}{(S^2+a^2)^2}$
2	t^n Para: n = 1, 2, 3,	$\frac{n!}{S^{n+1}}$ s > 0	9	Cosh at	$\frac{w}{S^2-w^2}$ s > 0
3	Cos wt	$\frac{S}{S^2-w^2}$ s > 0	10	Senh at	$\frac{S}{S^2-a^2}$ s > | a |
4	Sen wt	$\frac{w}{S^2-w^2}$ s > 0	11	Sen at – a t Cos at	$\frac{2.a.^3}{(S^2+a^2)^2}$
5	$e^{-k.t}$ Sen at	$\frac{a}{(S+k)^2+a^2}$	12	$e^{-k.t}$ Cos at	$\frac{S+k}{(S+k)^2+a^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	13	$\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$

Ejemplos:

1) $f_{(t)} = 2\, e^{4t}$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Función	Transformada	Para la función	Transformada
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$f_{(t)} = 2\, e^{4t}$	$L\{f_{(t)}\} = 2\left[\frac{1}{s-4}\right] = \frac{2}{(s-4)}$

2) $f_{(t)} = 3\, e^{-2t}$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Función	Transformada	Para la función	Transformada
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$f_{(t)} = 3\, e^{-2t}$	$\{f_{(t)}\} = 3\left[\frac{1}{s+2}\right] = \frac{3}{(s+2)}$

3) $f_{(t)} = 3$ **Cos 5t**

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Función	Transformada	Para la función	Transformada
3	Cos wt	$\frac{S}{S^2-w^2}$ s > 0	$f_{(t)} = 3$ **Cos 5t**	$L\{f_{(t)}\} = \frac{3s}{(s^2+25)}$

4) $f_{(t)} = 10$ **Sen 6t**

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para la función	Transformada	Para la función	Transformada
4	Sen wt	$\frac{w}{S^2-w^2}$ s > 0	10 **Sen 6t**	$L\{f_{(t)}\} = \frac{60}{(s^2+36)}$

5) $f(t) = 2t^2 - e^{-t} \Rightarrow L[f(t)] = 2\left[\frac{2!}{s^3}\right] - \frac{1}{s+1} = \frac{(4+4s-s^3)}{s^3(s+1)}$

6) $f(t) = 6\,\text{sen}\,2t - 5\cos 2t \Rightarrow L[f(t)] = 6\left[\frac{2}{s^2-4}\right] - 5\left[\frac{s}{s^2-4}\right] = \frac{12-5s}{s^2-4}$

7) $f(t) = 3\cosh 5t - 4\,\text{senh}\,5t \Rightarrow L[f(t)] = \frac{(3s-20)}{(s^2-25)}$ **8)** $f(t) = t\,\text{sen}\,3t \Rightarrow L[f(t)] = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$

9) $f(t) = (5e^{2t}-1)^2 = 25e^{4t} - 10e^{2t} + 1 \Rightarrow L[f(t)] = \frac{25}{s^2-4} - \frac{10}{s-2} + \frac{1}{s}$

10) $f(t) = \frac{t^2\cos 2t + t}{t} = \frac{(t\cos 2t + 1).t}{t}$ = t cos2t +1

L[f(t)]= L[t cos 2t +1] = L[t cos 2t] + L[1] → L[f(t)]= $\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} + \frac{1}{s}$

11) $f(t) = \cos^2 4t + t$

L[f(t)]= L[$\cos^2$ 4t +t]= $L\left[\frac{1+\cos 8t}{4}\right]$ + L[t] = $\frac{1}{4}L[1] + \frac{1}{4}L[\cos 8t]$+ L[t] = $\frac{1}{4}.\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+a^2} + \frac{1}{s^2}$

C. POR SERIES:

Si F(t) tiene el desarrollo de la serie: $F(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ **, su L puede calcularse por la suma de la transformada de Laplace de cada sumando de la serie.**

Ejemplo: **Para la función** t^n de acuerdo a la tabla, **su transformada es:** $\frac{n!}{S^{n+1}}$

- **Reemplazando en la serie anterior:** $f_{(t)} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} at^n$
- **Resulta: L** $\{f_{(t)}\}$ = $L\{f_{(t)}\} = \frac{o!.a_0}{s} + \frac{1!.a_1}{s^2} + \frac{2!.a_2}{s^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}}$

D. POR ECUACIONES DIFERENCIALES:

Se determina la ecuación diferencial que sea satisfecha por $f_{(t)}$.

Ejemplo: Si: $Y_{(t)}$ = Sen (t) $^{1/2}$;

Derivo dos veces: **4t.Y'' + 2 Y' + Y = 0**

La L , haciendo: **y = L| $Y_{(t)}$|**;

Será: $-4\frac{d}{ds}\{ s^2y - s\,Y_{(o)} - Y'_{(o)} \} + \{ sy - Y_{(o)}\} + y = 0$,

Luego: $4s^2y' + (6s-1)y = 0$

Resolviendo: $y = \frac{c}{s^{3/2}} e^{-1/4s}$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE: L^{-1}

La **función matemática** $f_{(t)}$ de la transformada de Laplace: $L\{ f_{(t)} \} = F_{(s)}$ es definida como la **transformada inversa de Laplace** de $F_{(s)}$, representada como: $L^{-1}\{F_{(t)}\} = f_{(s)}$

Ejemplos: Determinar la $L^{-1}\{F_{(t)}\}$ para:

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para la función	Transformada	Para la función	Transformada
2	t^n Para: n = 1, 2, 3,	$\frac{n!}{S^{n+1}}$ s > 0	$F(s)=\frac{2}{s^3}$	$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}(t) = L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) = t^2$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Función	Transformada	Para función	Transformada
4	Sen wt	$\frac{w}{S^2 - w^2}$ s > 0	$F(s)=\frac{3}{s^2+9}$	$L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}(t) = sen3t$

3) $F(s)=\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ $\quad L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}(t)$, completando cuadrado del denominador queda:

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t) = e^t \cos 2t$$

4) $F(s)=\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}$ $\rightarrow$ $L^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$

Por propiedad de linealidad:

$$= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 6L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}$$

$$= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 6L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\} = 5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3}{2}e^{-2t}\sin t$$

5) $F(s)=\frac{5}{(s+2)^4}$ $\quad L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}$

Como $(s+2)^4$, trabajo con la formula: $L^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}(t) = e^{at}t^n$, donde: $a=-2$ y $n=3$

Luego: $L^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^4}\right\}(t) = e^{-2t}t^3$ $\quad L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}(t) = \frac{5}{6}L^{-1}\left\{\frac{3!}{(s+2)^4}\right\}(t) = \frac{5}{6}e^{-2t}t^3$

6) $F(s) = \dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}$

$L^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{(s+1)^2+3^3}\right\}$ La forma de F(s) sugiere usar las formulas:

$L^{-1}\left\{\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\cos bt$; $L^{-1}\left\{\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\sin bt$ $a=-1$ y $b=3$

$\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10} = A\dfrac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + B\dfrac{3}{(s+1)^2+3^2}$, A y B constantes a determinar.

Multiplico ambos miembros por: $s^2+2s+10$ → 3s + 2 = A(s+1)+3B → 3s + 2 = As+(A+3B)

En esta identidad entre dos polinomios en s. al igualo los coeficientes de los términos:

A = 3, A+3B = 2 → B = -1/3 Finalmente:

$L^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$ (t) = $3\,L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) - \dfrac{1}{3}L^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) \;= 3e^{-t}\cos 3t - \dfrac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$

7) $L^{-1}\{s\} = 16\dfrac{s}{s^2+1}$ $L^{-1}\{s\} = 8\dfrac{2.s}{s^2+1}$ Por tabla $t.sent = \dfrac{2.as}{(s^2+a^2)^2}$

$L^{-1}\{s\} = 8L\{t.sent\}$ → $L^{-1}\{s\} = L\{8t.sent\}$

8) $f(s) = \dfrac{1}{s-8}$ $L^{-1}\{s\} = \dfrac{1}{s-8}$ Por tabla $\dfrac{1}{s-a} = e^{at}$ luego: $L^{-1}\{s\} = e^{8t}$

9) Para L{t} = $\dfrac{1}{s^2}$ la transformada inversa será **$L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2}\} = t$**

10) $L[f(t)] = \dfrac{1}{s+3} \Rightarrow f(t) = e^{-3t}$

11) $L[f(t)] = \dfrac{1}{s^4} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{3!}t^3$

12) $L[f(t)] = \dfrac{1}{s^2+9} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{3}\text{sen}\,3t$

13) $L[f(t)] = \dfrac{2s+3}{s^2+9} \Rightarrow f(t) = 2\cos 3t + \text{sen}\,3t$

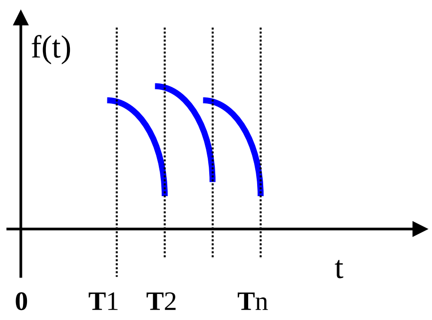
4. L de DERIVADAS: $L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)}$

Suponiendo que para todo intervalo finito $0 \leq t \leq T$, la función continua f(t) es de orden exponencial, cuya derivada es f ' (t) continua a trozos, entonces: $L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)}$

Ejemplo: Para $f_{(t)}$ = Cos 3t aplico $L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)} \rightarrow L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{\text{Cos } 3t\} - f_{(o)}$

Tabla de transformadas de Laplace				En este caso:	
Nº	Para función	Transformada		Para la función	Transformada
3	Cos wt	$\frac{S}{S^2 - w^2}$	s > 0	$f_{(t)}$ = Cos 3t	$L\{f_{(t)}\} = L\{\text{Cos } 3t\} = \frac{s}{s^2+9}$

$$L\{f'_{(t)}\} = s\,\frac{s}{s^2+9} - f_{(o)} = s\,\frac{s}{s^2+9} - \text{Cos}(0) = s\frac{s}{s^2+9} - 1 = \frac{s^2}{s^2+9} - 1 = \frac{s^2 - s^2 - 9}{s^2+9} = \frac{-9}{s^2+9}$$



Demostración de $L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)}$:

Si $f_{(t)}$ es función continua a trozos en $0 \leq t \leq T$, habrá un número finito de subintervalos (0 a T_1), (T_1 a T_2), .. ,(T_{n-1} a T)

En cada uno ocurre que $f'_{(t)}$ es continua y sus límites son finitos, cuando **t** se aproxima a los extremos de cada intervalo.

Considerando tales subintervalos:

$$\int_0^T e^{-st} f_{(t)}dt = \int_0^{T1} e^{-st} f'_{(t)}dt + \int_{T1}^{T2} e^{-st} f'_{(t)}dt + .. + \int_{Tn}^{T} e^{-st} f'_{(t)}dt;$$ Integrando por partes:

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = [\ e^{-st} f(t) \Big|_0^{T1} + s\int_0^{T1} e^{-st} f(t)\, dt\ ] + [\ e^{-st} f(t) \Big|_{T1}^{T2} + s\int_{T1}^{T2} e^{-st} f(t)\, dt] + . . + [\ e^{-st} f(t) \Big|_{Tn}^{T} + s\int_{Tn}^{T} e^{-st} f(t)\, dt\ ]$$

Si $f_{(t)}$ es continua : $\int_0^{T1} e^{-st} f'_{(t)}\, dt = e^{-st} f_{(T)} - f_{(o)} + s\int_0^{T} e^{-st} f_{(t)}\, dt$ y como $f_{(t)}$ es exponencial,

si T es grande se cumplirá: $|\ e^{-st} f(T)\ | \leq ¦\ e^{-st} M e^{at}\ ¦ = M e^{-(s-a)T}$, en el límite: $\lim_{T \to \infty} e^{-st} f_{(T)} = 0$

luego, $L\{f'_{(t)}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'_{(t)}\, dt = s\int_0^{\infty} e^{-st} f_{(t)}\, dt - f(o) = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)}$; es lo queríamos demostrar

5. L de INTEGRALES

El teorema de integración especifica que si $L\{f_{(t)}\} = F_{(S)}$, luego $L\{\int_0^t f_{(u)}\,du\} = \frac{F(s)}{s}$

Ejemplo: Para $f_{(t)}$ = Sen 2t para aplicar: $L\{\int_0^t f_{(u)}\,du\} = \frac{F(s)}{s}$ donde $F_{(S)} = L\{f_{(t)}\}$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para función	Transformada	Para función	Transformada
4	Sen wt	$\frac{w}{S^2 - w^2}$ s > 0	$f_{(t)}$ = Sen 2t	$F_{(S)} = L\{f_{(t)}\} = L\{\text{Sen } 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$

$$L\{\int_0^t f_{(u)}\,du\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Demostración de: $L\{\int_0^t f_{(u)}\,du\} = \frac{F(s)}{s}$:

Sea $G_{(t)} = \int_0^t f_{(u)}\,du$ entonces será $G'_{(t)} = f_{(t)}$, $G'_{(o)} = 0$, Por ello si

- L{ G'(t) } = s L{ G(t) - G(o) } o también:
- L{ f(t) } = s L{ G(t) } por lo tanto
- $L\{G(t)\} = L\{\int_0^t f(u)\,du\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$

Luego la transformada inversa de Laplace se cumple que: $L^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(u)\,du$

6. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Si las funciones en t: f y g son continuas por partes en [0, ∞], luego un producto especial, denotado como f *g, se designa como CONVOLUCIÓN definida mediante la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau) - g(t-\tau)\,d\tau$$

La convolución de dos funciones es conmutativa, es decir: f * g = g * f

Si $f_{(t)}$ y $g_{(t)}$ son funciones continuas por partes en [0, ∞] y de orden exponencial, entonces:

$$L\{ f_{(t)} * g_{(t)} \} = L\{ f_{(t)} \} L\{ g_{(t)} \} = F_{(S)}\, G_{(S)}$$

Ejemplo: Aplicar el teorema de la convolucion: Para $f_{(t)} = e^t$ y $g_{(t)} = \text{Sen } t$

Aplico el teorema: $L\{ f_{(t)} * g_{(t)} \} = L\{ f_{(t)} \} L\{ g_{(t)} \} = L\{ e^t \} L\{ \text{Sen } t \}$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Función	Transformada	Para función	Transformada
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$f_{(t)} = e^t$	$F_{(S)} = L\{f_{(t)}\} = L\{ e^t \} = \frac{1}{(s-1)}$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Función	Transformada	Para función	Transformada
4	Sen wt	$\frac{w}{S^2 - w^2}$ s > 0	$f_{(t)} = \text{Sen } t$	$G_{(S)} = L\{g_{(t)}\} = L\{ \text{Sen } t \} = \frac{1}{(s^2-1)}$

Respuesta: $L\{ e^t \} L\{ \text{Sen } t \} = \frac{1}{(s-1)} * \frac{1}{(s^2-1)} = \frac{1}{(s-1)(s^2-1)}$

Demostración: Si $F_{(S)} = \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du$ **y** $G_{(S)} = \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv$

$$F_{(S)}\, G_{(S)} = \left[\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du\right] \cdot \left[\int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)\, g(v)\,du\,dv =$$

$$F_{(S)}\, G_{(S)} = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-s(u+v)} f(u)\, g(t-u)\,du\,dt = \int_{t=0}^\infty \left[\int_{u=0}^t e^{-s(u+v)} f(u)\, g(t-u)\,du\right] dt =$$

$$\delta\left\{\int_0^t f(u)\, g(t-u)\,du\right\}$$

Así la **L** de la convolución de dos funciones, implica el **Teorema de Convolución:**

$$L\{ f_{(t)} * g_{(t)} \} = L\{ f_{(t)} * g_{(t)} \} = L\{ f_{(t)} \} L\{ g_{(t)} \} = F_{(S)}\, G_{(S)}$$

Por otra parte: $\mathbf{f_{(t)} * g_{(t)}} = \int_0^t f(\tau) - g(t-\tau)\,d\tau \rightarrow \mathbf{f_{(t)} * g_{(t)}} = \mathbf{e^t * \text{Sen } t}$

$$\mathbf{e^t * \text{Sen } t} = \int_0^t e^{\tau} sen(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(-sent - \cos t + e^t\right)$$

Como: $\mathbf{e^t * \text{Sen } t} = \int_0^t e^{t-\tau}.sen(\tau).d\tau = \frac{e^{\tau}}{2}\left(sen(-\tau) - \cos(-\tau)\right)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(-sent - \cos t + e^t\right)$

Así se demuestra que: $\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)dt = \int_0^t f(t-\tau).g(t)dt$

$\mathbf{f_{(x)} * g_{(x)} = g_{(x)} * f_{(x)}}$ Así, se verifica la propiedad de **conmutación**

Aunque, la integral del producto de funciones no es el producto de las integrales, sin embargo, la transformada de Laplace del producto especial, es el producto de la transformada de Laplace de $\mathbf{f_{(x)}}$ y $\mathbf{g_{(x)}}$. El resultado es el teorema de convulsión.

En el ejemplo: $\mathbf{f_{(t)} = e^t}$ $\mathbf{g_{(t)} = \text{Sen } t}$, para evaluar: $\mathbf{L\{}\int_0^t e^{\tau} sen(t-\tau)\,d\tau\mathbf{\}}$, el teorema de convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de $\mathbf{f_{(x)}}$ y $\mathbf{g_{(x)}}$ es el producto de sus transformadas de Laplace: $\mathbf{L\{}\int_0^t e^{\tau} sen(t-\tau)\,d\tau\mathbf{\}}$

$$\mathbf{L\{}\int_0^t e^{\tau} sen(t-\tau)\,d\tau\mathbf{\}} = \mathbf{L\{\, e^t \,\}\, L\{\, \text{Sen } t \,\}} = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Como: $\mathbf{L\{ f_{(t)}\} = F_{(S)}}$ y $\mathbf{L\{ g_{(t)}\} = G_{(S)}}$; la convolución: $\mathbf{F_{(S)}\, G_{(S)}} = \mathbf{L\{}\int_0^t \mathbf{f_{(u)}\; g_{(t-u)}\; du\}}$

Por el mismo criterio si: $\mathbf{L^{-1}\{F_{(S)}\} = f_{(t)}}$ y $\mathbf{L^{-1}\{G_{(S)}\} = g_{(t)}}$, luego

La convolución para la transformada inversa será: $\mathbf{L^{-1}\{F_{(S)}\, G_{(S)}\}} = \int_0^t \mathbf{f_{(u)}\; g_{(t-u)}\; du}$;

y como $\mathbf{f_{(x)} * g_{(x)} = g_{(x)} * f_{(x)}}$, podemos escribirla como $f\,.\,g = \int_0^t f(u)\,g(u-t)\,du$

FORMA INVERSA DEL TEOREMA DE CONVOLUCION

c{F(S) . G(S) } = $\int_0^t$ f(u) . g(t-u) du = f(t) . g(t)

Ejemplo: Para determinar $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

Se conocen $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$ y $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \text{sen}\, t$

Por lo cual, aplicando el teorema de convolución, se tiene

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos t * \text{sen}\, t$$

$$= \int_0^t \cos u\, \text{sen}(t-u)du = \int_0^t \cos u[\text{sen}\, t\cos u - \cos t\,\text{sen}\, u]du$$

$$= \text{sen}\, t\int_0^t \cos^2 u du - \cos t\int_0^t \text{sen}\, u\cos u du$$

$$= \text{sen}\, t\left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\text{sen}\, t\cos t\right] - \cos t\left[\tfrac{1}{2}\text{sen}^2 t\right] = \tfrac{1}{2}t\,\text{sen}\, t$$

Ejemplo: Para determinar $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

- De la expresión: $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s}\times\frac{1}{s^2+1} = F(s)G(s)$ resultan

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \text{sen}(t)$

- Aplicando el teorema de convolución: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$

$$f * g = \int_0^t \text{sen}(\sigma)\times 1\, d\sigma = [-\cos(\sigma)]_{\sigma=0}^{\sigma=t} = -\cos(t) + 1$$

- Observa que alternativamente se tendría que: $f * g = \int_0^t 1\times\text{sen}(t-\sigma)\,d\sigma$
- Concluimos que: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = -\cos(t) + 1$

L DESDE LA FORMA INVERSA DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Es posible hallar la **L** de la integral de $\mathbf{f_{(x)}}$, a partir de la forma inversa del teorema de convolución, considerando que: $\mathbf{g_{(t)}} = 1$, $\mathbf{L\{g_{(t)}\} = G_{(S)}} = 1/s$.

Por el teorema de convolución: $L\left\{\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)dt\right\} = F(s).G(s)$

Lo que en este caso: $L\left\{\int_0^t f(\tau).d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$

Y según la forma inversa $f(t) = L^{-1}[F(s)]$

Que aplicada a este caso: $\int_0^t f(\tau).d\tau = L^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\}$

Ejemplo: Determinar: $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

- Para aplicar el teorema: $\dfrac{F(s)}{s} = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$ → $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$
- Por teorema de la transformada de la integral : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} dt$
- De la tabla de transformadas: $\int_0^t L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} dt = \int_0^t \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\, dt$
- Desarrollando la integral

$$\int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{t=0}^{t=t}$$

La integral queda:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right]$$

Por tanto: $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\cos(2t)$

7. MULTIPLICACION DE LA TRANSFORMADA por t^n → $L\{t^n.f_{(t)}\}$

La **L** de la función $f_{(t)}$ multiplicada por un monomio t^n; es $L\{t^n.f_{(t)}\}$ y se puede encontrar mediante la diferenciación de la **L** de $f_{(t)}$ suponiendo que:

- $F_{(S)} = L\{f_{(t)}\}$ existe.
- Y es posible intercambiar el orden de diferenciación e integración.

$$\frac{d}{ds} L\{f_{(t)}\} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t).dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)\right]dt = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t).dt = -L\{t.f_{(t)}\}$$

Resulta: $\frac{d}{ds} L\{f_{(t)}\} = -L\{t.f_{(t)}\}$

Utilizando este resultado se puede hallar $L\{t^2.f_{(t)}\}$:

$$L\{t^2.f_{(t)}\} = L\{t.t.f_{(t)}\} = -\frac{d}{ds}L\,[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}L\,[f(t)]\right) = \frac{d^2}{ds^2} L\{f_{(t)}\}$$

Generalizando para: $L\{t^n.f_{(t)}\}$, resulta el

TEOREMA de DERIVADAS DE TRANSFORMADAS:

Si es $F_{(S)} = L\{f_{(t)}\}$ y **n = 1,2,3,…** luego

- $L\{t^n.f_{(t)}\} = (-1)\frac{d^n}{ds^n} L\{f_{(t)}\}$
- $L\{t^n.f_{(t)}\} = (-1)\frac{d^n}{ds^n} F_{(S)}$

Si: $L\{f_{(t)}\} = F_{(S)}$; → $L\{t^n.f_{(t)}\} = (-1)^n \frac{d^n}{d.s^n} F_{(S)} = (-1)^n f^n_{(S)}$

Teorema: Derivada de transformadas

Si $F_{(S)} = L\{f_{(t)}\}$ y n = 1, 2, 3…, entonces: $L\{t^n.f_{(t)}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F_{(S)}$

Ejemplo: Para $L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$

Aplico $L\{t^n.f_{(t)}\} = (-1)^n \frac{d^n}{d.s^n} F_{(S)}$ resulta: $L\{t.e^{2t}\} = \frac{d^n}{d.s^n}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para la función	Transformada	Para la función	Transformada

Ejemplo: Para determinar $L\{t.Sen\ k.t\}$

Con: $f_{(t)} = Sen\ k.t$, $F_{(S)} = \frac{k}{s^2+k^2}$ y n = 1

$$L\{t.Sen\ k.t\} = \int_0^\infty e^{-st} sen(tk).dt = \frac{k}{s^2+k^2}$$

Aplico el Teorema:

L{t.Sen k.t} = $-\frac{d}{ds}L\{senkt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

8. DIVISIÓN DE LA TRANSFORMADA por t

Si L{f$_{(t)}$} = F$_{(S)}$, luego: L{ f$_{(t)}$ / t} = $\int_s^\infty$ **F$_{(U)}$.du;** siempre que exista límite **Lím$_{t\to 0}$ f(t)/t**

Ejemplo: Para **f$_{(t)}$ = Sen t → L{ Sen t } = F$_{(S)}$**

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para la función	Transformada	Para la función	Transformada

De la tabla:

4	Sen wt	$\frac{w}{S^2 - w^2}$	s > 0

L{ Sen t } = $\frac{1}{s^2+1}$ y como Lím$_{t\to 0}$ $\frac{Sen.t}{t}$ = 1, por tanto existe

Aplico: **L{ f$_{(t)}$ / t}** = $\int_s^\infty$ **F$_{(U)}$.du** → **L{**$\frac{Sen.t}{t}$**}** = $\int_s^\infty \frac{d.u}{u^2+1}$ = $\tan^{-1}\frac{1}{s}$

Demostración:

- L { f(at) } = $\int e^{-st}$ f(at) dt Reemplazando t = $\frac{v}{a}$
- L { f(at) } = $\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{\frac{-sv}{a}} f(v)$ dv f(v) dv = $\frac{1}{a}$ F($\frac{s}{a}$)

Del mismo modo para la **transformada inversa de Laplace** se cumple que

Si **L^{-1}{F$_{(S)}$} = f$_{(t)}$** por lo tanto **L^{-1}{ F($\frac{s}{a}$) } = a f$_{(at)}$**

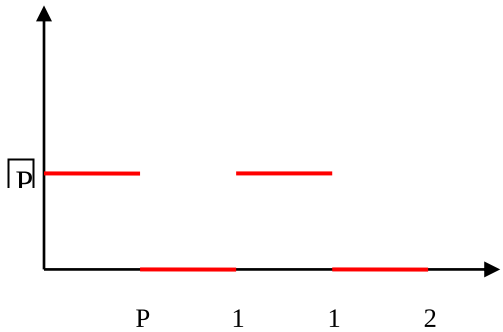
9. FUNCIONES PERIODICAS

Sea $\mathbf{f}_{(t)}$ con período $\mathbf{T > 0}$, tal que $\mathbf{f}_{(t+T)} = \mathbf{f}_{(t)}$ entonces: $\mathbf{L\{ f_{(t)}\}} = \dfrac{\int_0^T e^{-s.t} f(t).dt}{1-e^{-s.t}}$

Si una función periódica tiene periodo T, T > 0, entonces $\mathbf{f}_{(t+T)} = \mathbf{f}_{(t)}$, luego la transformada de Laplace de una función periódica se obtiene mediante integración sobre un periodo.

Teorema de la Transformada de la función periódica: Si $\mathbf{f}_{(t)}$ es continua por partes en $[0, \infty]$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces: $\mathbf{L\{ f_{(t)}\}} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st}\, \mathbf{f}_{(t)}\mathbf{dt}$

Ejemplo: Transformada de Laplace de la función onda cuadrada de periodo T = 2:
E(t) = 1 si $0 \le t < 1$ y 0 si $1 \le t < 2$ y fuera del intervalo mediante f (t + 2) = f(t).



Aplicando el teorema anterior:

$$L\{E(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} E(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} 1\, dt + \int_1^2 e^{-st} 0\, dt \right] = \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$1-e^{-2s} = (1+e^{-s})(1-e^{-s})$$

Entonces: $= \dfrac{1}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})} \dfrac{1-e^{-s}}{s} \rightarrow L\{E(t)\} = \dfrac{1}{s(1+e^{-s})}$

10.APLICACIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

La transformada de Laplace simplifica la solución de las:

1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Si: $\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha\frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t)$; ó sea: $Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t)$ [1]

Donde:

- α y β: Constante dependiente de condición inicial de frontera $Y(o)= A$ é $Y'(o)= B$ [2]
- A y B: Constantes dadas.

Con la transformada de Laplace para $Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F_{(t)}$, usando la condición [2] logramos una ecuación algebraica para determinar $L\{ Y_{(t)}\} = y_{(s)}$

La solución se obtiene calculando la transformada inversa de Laplace de y(s); método que podemos generalizar para las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ejemplo: Resolver **$Y'' + Y' = t$**, Para: $Y_{(o)} = 1$, e $Y'_{(o)} = -2$

Aplicando la transformada de la Laplace: $L\{Y''\} + L\{Y'\} = L\{t\}$, para las condiciones planteadas: $s^2y - sY(0) - Y'(0) + y = \frac{1}{s^2}$, luego: $s^2y - s + 2 + y = \frac{1}{s^2}$; luego

$$y = L\{ Y \} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

Finalmente: $Y = L^{-1}\{ y \} = L^{-1}\{ \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\} = t + \text{Cos } t + 3\text{Sen } t$

2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES.

Ecuaciones de la forma: $t^m Y^{(n)}(t)$; cuya transformada de Laplace es: $(-1)^m \frac{dm}{ds^m} L\{Y^{(n)}(t)\}$

Ejemplo: Resolver: **$tY'' + Y' + 4tY = 0$**, Para: $Y_{(o)} = 3$, e $Y'_{(o)} = 0$

- Aplicando la transformada de la Laplace: $L\{tY''\} + L\{Y'\} + L\{4tY\} = 0$
- Para las condiciones planteadas: $-\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + \{sy - Y(0)\} - 4\frac{dy}{ds} = 0$,

  luego: $(s^2+4)\frac{dy}{ds} + sy = 0$, de donde: $\frac{dy}{y} + \frac{s.ds}{s^2+4} = 0$
- Integrando: $\ln y + ½ \ln(s^2 + 4) = c_1$ ó sea: $y = \frac{c}{(s^2+4)^{1/2}}$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS SIMULTANEAS.

Con los procedimientos anteriores podemos resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo: Resolver

- $\dfrac{dX}{dt} = 2X - 3Y;$
- $\dfrac{dY}{dt} = Y - 2X$ Para $X(0) = 8$ e $Y(0)=3$

Aplicando transformada de Laplace: $L\{X\} = x$; $L\{Y\} = y$; luego:

- $.s.x - 8 = 2x - 3y$ ó sea: $\mathbf{(s-2)x + 3y = 8}$
- $.s.y - 3 = y - 2x$ ó sea: $\mathbf{2x + (s-1)x = 3}$

Aplicando determinantes resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, resulta:

$X = L^{-1}\{ x \} = 5.e^{-t} + 3.e^{4t}$

$Y = L^{-1}\{ y \} = 5.e^{-t} - 2.e^{4t}$

APLICACIÓN: CAIDA DE CUERPOS CON ROZAMIENTO

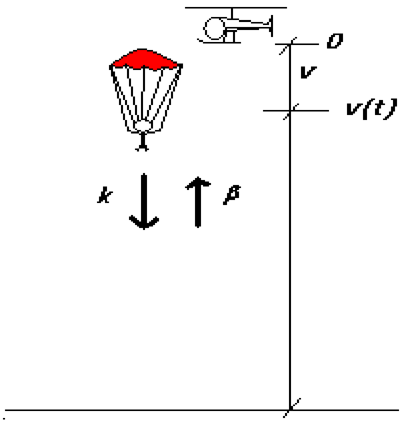
Determinar la velocidad $V_{(t)}$ en el instante de 2 segundos del paracaidista de peso k = 80Kg, que cae verticalmente partiendo del reposo, sobre el actúa la fuerza de resistencia del aire Fr proporcional a la velocidad $V_{(t)}$ en cualquier instante ($Fr = \beta V_{(t)}$).

Datos:

- Peso del paracaidista: $k = 80$ Kg
- Gravedad terrestre: $g = 9{,}8$ m/s^2
- Tiempo de caída: $t = 2$ seg
- Densidad de aire: $\rho = 1{,}29$ kg/m^3
- Área del paracaidista: $A = 0{,}6$ m^2
- Coeficiente de forma: $\delta = 0{,}8$

Calculo **coeficiente de rozamiento** del aire: β

$$\beta = \frac{\rho.A.\delta}{2} = \frac{1{,}29.0{,}6.0{,}8}{2} = 0{,}3096$$



De la 2da ley de Newton: El **Peso del paracaidista**:

$$\mathbf{m\,.\,a + \beta.v = k} \rightarrow \frac{k}{g}.\frac{dv}{dt} + \beta.\, v_{(t)} = k$$

Multiplico por **g** y divido por **k** ambos miembros:

$$\left(\frac{k}{g}.\frac{dv}{dt}\right)g\,/\,k + (\beta.\, v_{(t)})\, g\,/\,k = (\,k\,)\, g\,/\,k$$

$$\frac{dv}{dt} + (\beta.\, g.\, v_{(t)})\,/\,k = g$$ Donde si la **velocidad** es: $v_{(t)} = dx/dt$ → **aceleración** será: $v'_{(t)} = dv/dt$

$$v'_{(t)} + (\beta.\, g.\, v_{(t)})\,/\,k = g$$ (Ecuación diferencial de grado 1 y orden 1).

Por **propiedad de linealidad de la L**:

$$L\{v_{(t)}'\} + L\{\frac{\beta g}{k} v_{(t)}\} = L\{g\} \rightarrow \text{Como } \frac{\beta g}{k} \text{ y } g \text{ son constantes} \rightarrow L\{v_{(t)}'\} + \frac{\beta g}{k} L\{v_{(t)}\} = gL\{1\} \quad \text{[I]}$$

Calculo **L** de cada término:

a) Aplico **transformada de Laplace de derivadas**: $L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)}$ Para: $L\{v_{(t)}'\}$

Por definición: $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$, Luego: $L\{v_{(t)}\} = v_{(S)}$

La transformada queda: $L\{v'_{(t)}\} = s\,L\{v_{(S)}\} - v_o = s\,v_{(S)} - v_o$: Así → $L\{v'_{(t)}\} = s\,v_{(S)} - v_o$ **[II]**

b) Para: $\frac{\beta g}{k} L\{v_{(t)}\}$, la transformada de $L\{v_{(t)}\} = v_{(S)}$: Así → $\frac{\beta g}{k} L\{v_{(t)}\} = \frac{\beta g}{k} v_{(S)}$ **[III]**

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para la función	Transformada	Para la función	Transformada
1	$\frac{1}{s}$	**1**	$gL\{1\}$	$g\,\frac{1}{s}$

[IV]

Reemplazo: [II], [III], [IV] en [I] : $s.v_{(s)} - v_{(o)} + \frac{\beta g}{k}\, v_{(s)} = \frac{g}{s}$, Como $v_{(o)} = 0 \rightarrow s.v_{(s)} + \frac{\beta g}{k}\, v_{(s)} = \frac{g}{s}$

Saco factor común $v_{(s)}$: $v_{(s)}\, [s + \frac{\beta g}{k}] = \frac{g}{s}$, despejo $v_{(s)} \rightarrow v_{(s)} = \dfrac{g}{s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}$

La velocidad en función de **t** es $v_{(t)}$ que es la transformada inversa de Laplace para $v_{(s)}$:

$$v_{(t)} = L^{-1}\{v_{(s)}\} = L^{-1}\left\{\frac{g}{s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\} = g\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\} \rightarrow$$ Hago: $a = \frac{\beta g}{k}$, por tabla:

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para función	Transformada	Para la función	Transformada
73	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$v_{(t)} = gL^{-1}\{\frac{1}{s[s+a]}\}$	$g\,\frac{1}{a}\,(1-e^{-at})$

$$v_{(t)} = gL^{-1}\left\{\frac{1}{s[s+a]}\right\} = g\,\frac{1}{a}\,(1-e^{-at}) = g\left(\frac{1}{\frac{\beta g}{k}}\right).\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right) = \left(\frac{kg}{\beta g}\right).\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right) = \frac{k}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right) \quad \text{[V]}$$

Reemplazo valores: $v_{(t)} = \dfrac{80}{0{,}3096}\left[1-e^{-\frac{(0{,}3096)(9{,}8)t}{80}}\right] = 258{,}397\left[1-e^{-\frac{(0{,}3096)(9{,}8)t}{80}}\right]$

Velocidad que tiene el paracaidista a los 2 segundos luego de saltar del helicóptero. Reemplazo **t = 2**

$v_{(2)} = 258{,}397\left[1-e^{-\frac{(0{,}3096)(9{,}8)(2)}{80}}\right] = 258{,}397\,[1-e^{-0{,}075852}] = 258{,}397\,[1- 0{,}92695]$ **= 18,875 m/seg**

Para calcular **la posición en el tiempo** $x_{(t)}$, a partir de [V]: $v_{(t)} = \frac{k}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right)$:

$.x'_{(t)} = \frac{dx}{dt} = v_{(t)} = \frac{k}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right) \rightarrow x'_{(t)} = \frac{k}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right) = \frac{k}{\beta} - \frac{k}{\beta}e^{-\frac{\beta g}{k}.t}$

Por **propiedad de la linealidad de la L**: $L\{x'_{(t)}\} = L\left\{\frac{k}{\beta} - \frac{k}{\beta}e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\right\} = \frac{k}{\beta}L\{1\} - \frac{k}{\beta}L\{e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\}$ [VI]

Calculo la **L** a cada término de [VI]:

a) Para $L\{x'_{(t)}\}$ aplico **L** de derivadas: $L\{f'_{(t)}\} = s\,L\{f_{(t)}\} - f_{(o)}$

Como: $f'_{(t)} = x'_{(t)} = \frac{dx}{dt}$, y por definición: $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$, resulta $L\{x_{(t)}\} = x_{(S)}$

Así, la transformada queda: $L\{x'\} = s\,L\{x_{(S)}\} - x_o = s\,x_{(S)} - x_o$ [VII]

b) Para el término $\frac{k}{\beta}L\{1\}$, de la tabla L : $f_{(S)} = \frac{k}{\beta}L\{1\} = \frac{k}{\beta}\,\frac{1}{s}$ [VIII]

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para la función	Transformada	Para la función	Transformada
1	$\frac{1}{s}$	1	$f_{(S)} = \frac{k}{\beta}L\{1\}$	$\frac{k}{\beta}\,\frac{1}{s}$

c) Para el término $-\dfrac{k}{\beta}\mathbf{L}\{e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\}$, si **a** = $-\dfrac{\beta g}{k}$, por tabla:

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para función	Transformada	Para la función	Transformada
5	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	$f_{(S)} = -\dfrac{k}{\beta}\mathbf{L}\{e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\}$	$-\dfrac{k}{\beta}\dfrac{1}{s-a}$

$$f_{(S)} = -\frac{k}{\beta}\mathbf{L}\{e^{-\frac{\beta g}{k}.t}\} = -\frac{k}{\beta}\frac{1}{s-a} = -\frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{s-\left[-\frac{\beta g}{k}\right]}\right) = -\frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{s+\frac{\beta g}{k}}\right) \quad \text{[IX]}$$

Reemplazo en [VI], los valores de [VII], [VIII] y [IX], y como: $f_{(t)}$ y $f_{(s)}$, son $x_{(t)}$ y $x_{(s)}$.

$$s.x_{(s)} - x_{(o)} = \frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{s+\frac{\beta g}{k}}\right) \rightarrow \text{Como } x_{(o)} = 0 \rightarrow s.x_{(s)} = \frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{s+\frac{\beta g}{k}}\right)$$

Despejo $x_{(s)}$: $\quad x_{(s)} = \dfrac{k}{\beta}\left(\dfrac{1}{s^2}\right) - \dfrac{k}{\beta.s}\left(\dfrac{1}{s+\frac{\beta g}{k}}\right) = \dfrac{k}{\beta}\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{k}{\beta s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}$

La posición $x_{(t)}$ respecto al tiempo, será la inversa de Laplace para $x_{(s)}$:

$$x_{(t)} = \mathbf{L}^{-1}\{x_{(s)}\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{k}{\beta}\frac{1}{s^2} - \frac{k}{\beta s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{k}{\beta}\frac{1}{s^2}\right\} - \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{k}{\beta s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\}$$

$$x_{(t)} = \frac{k}{\beta}\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{k}{\beta}\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\} \quad \text{[X]}$$

Resuelvo cada uno sus términos:

a) De la tabla, para el término $\dfrac{k}{\beta}\mathbf{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s^2}\}$, $\dfrac{k}{\beta}$ es constante:

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para función	Transformada	Para la función	Transformada
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t	$f_{(s)} = \dfrac{k}{\beta}\dfrac{1}{s^2}$	$\mathbf{L}^{-1}\{f_{(s)}\} = \dfrac{k}{\beta}\mathbf{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s^2}\}$

$$.\ f_{(s)} = \frac{k}{\beta}\frac{1}{s^2} \rightarrow \mathbf{L}^{-1}\{f_{(s)}\} = \frac{k}{\beta}\mathbf{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = \frac{k}{\beta}\,t \text{, luego: } f_{(t)} = x_{(t)} = \frac{k}{\beta}\,t \quad \text{[XI]}$$

b) Para el término $-\dfrac{k}{\beta}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\}$ son constantes, $-\dfrac{k}{\beta}$ y **a** = $\dfrac{\beta g}{k}$, así, de la tabla de Laplace:

Tabla de transformadas de Laplace			En este caso:	
Nº	Para función	Transformada	Para la función	Transformada
73	$\dfrac{1}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$	$f_{(s)} = -\dfrac{k}{\beta}\mathbf{L}^{-1}\left\{\left\{\dfrac{1}{s[s+a]}\right\}\right\}$	$-\dfrac{k}{\beta}\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$

$$. f_{(s)} = -\frac{k}{\beta}L^{-1}\left\{\left\{\frac{1}{s[s+a]}\right\}\right\} = -\frac{k}{\beta}\,\frac{1}{a}(1-e^{-at}) = -\frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{\left[\frac{\beta g}{k}\right]}\right)\left(1-e^{-\left[\frac{\beta g}{k}\right]t}\right) \qquad [XII]$$

Reemplazo en [X], los valores de [XI] y [XII] y [IX]:

$$x_{(t)} = \frac{k}{\beta}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{k}{\beta}L^{-1}\left\{\frac{1}{s\left[s+\frac{\beta g}{k}\right]}\right\} = \frac{k}{\beta}t - \frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{\left[\frac{\beta g}{k}\right]}\right)\left(1-e^{-\left[\frac{\beta g}{k}\right]t}\right) = \frac{k}{\beta}t - \frac{k}{\beta}\left(\frac{k}{\beta g}\right)\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}t}\right)$$

$$x_{(t)} = \frac{k}{\beta}t - \frac{k^2}{\beta^2 g}\left(1-e^{-\frac{\beta g}{k}t}\right) = \frac{k}{\beta}t - \frac{k^2}{\beta^2 g} - \frac{k^2}{\beta^2 g}e^{-\frac{\beta g}{k}t} = \frac{k}{\beta}\left[t - \frac{k}{\beta\; g} - \frac{k}{\beta\; g}e^{-\frac{\beta g}{k}t}\right]$$

Reemplazo los valores:

$$x_{(t)} = \frac{80}{0{,}3096}\left[t - \frac{80}{(0{,}3096).(9{,}8)} + \frac{80}{(0{,}3096)(9{,}8).}e^{-\frac{\beta g}{K}t}\right] = \frac{80}{0{,}3096}\left[t - \frac{80}{3{,}03408} + \frac{80}{3{,}09408}e^{-\frac{3{,}09408}{80}t}\right]$$

Para calcular la posición del paracaidista, luego de su lanzamiento, reemplazo **t = 2**:

$$x_{(2)} = \frac{80}{0{,}3096}\left[2 - \frac{80}{3{,}03408} + \frac{80}{3{,}09408}e^{-\frac{(3{,}09408)}{80}.2}\right] = 258{,}3979[2 - 26{,}3671 + 26{,}3671e^{-0{,}075852}]$$

$$x_{(2)} = 258{,}3979[2 - 26{,}3671 + 24{,}4411] = [516{,}7958 - 6813{,}21 + 6315{,}5304] = \mathbf{19{,}11\ m}$$

APLICACIÓN: SISTEMA DE CONTROL

Un sistema de control es un conjunto de componentes que regulan su propia conducta o la de otro sistema para lograr un funcionamiento predeterminado, buscando reducir las probabilidades de fallos de un sistema real, los resultados predefinidos en un sistema teórico planeado. Con este fin, una herramienta matemática es la transformada de Laplace **L**

- Al estudiar procesos reales es necesario considerar **modelos dinámicos**, de comportamiento variable respecto al tiempo, para evitar o corregir oportunamente errores del sistema real.
- Esto implica usar **ecuaciones diferenciales respecto al tiempo** para simular matemáticamente el comportamiento de procesos.
- La **L** es útil para analizar tales sistemas, así, permitir resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con lo cual se facilita su estudio.

EL DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL: Requiere

- Conocer el proceso a controlar, es decir, conocer la **ecuación diferencial** que describe su comportamiento, utilizando las leyes físicas. Esta ecuación diferencial es el **MODELO PLANEADO DEL PROCESO**.
- Con el modelo planeado, se puede diseñar el **CONTROLADOR**.

LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

- Representa el comportamiento dinámico del proceso.
- Muestra cómo cambia la salida de un proceso ante un cambio en la entrada.

$$\frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}} = \frac{CambioSalidaProceso}{CambioEntradaProceso} \quad y \quad \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}} = \frac{RespuestaDeProceso}{FuncionForzante}$$

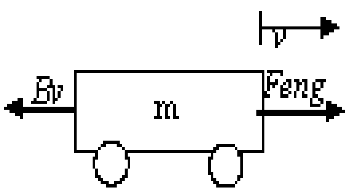
DIAGRAMA DE BLOQUES:

ENTRADA(Estímulo forzante) → **PROCESO** →**SALIDA**(Respuesta al estímulo)

Ejemplo: **CONTROL DE VELOCIDAD CRUCERO EN UN VEHÍCULO**

El controlador mantiene la estabilidad del sistema real, cuyas entradas son circunstanciales y en casos no controlables. Así, por un lado, mantiene al sistema en operación regular aunque aparezcan entradas arbitrarias y por otro, corregir los errores detectados en las salidas. Un sistema de control es permite obtener una salida específica del sistema manipulando apropiadamente, una determinada entrada.

El sistema de navegación crucero del vehículo el **Cruise Control** o control crucero, es un instrumento que permite al conductor fijar la velocidad a la que desea circular y retirar el pie del acelerador, sin temor a que ésta descienda, pudiendo mantener constante la velocidad de avance, lo cual es de especial utilidad en los viajes largos.



Por Newton:

$$\sum F = ma \rightarrow mv' = F_{eng} - Bv \quad (1)$$

(Ecuación diferencial de grado 1 y de orden 1)

Para:

m = 1000 Kg y **B = 50(m.seg/m)**

Donde:

- **m**: masa del auto
- **v'**: aceleración
- **B**: coeficiente de fricción
- **v**: velocidad
- **F_{eng}**:fuerza propulsora del motor, función del tiempo.

Como el vehículo parte del reposo, acelerará hasta que la fuerza del motor se encuentre en equilibrio con la fuerza de rozamiento resultando una velocidad constante (adopto 20 m/s) y aceleración cero.

$$Bv_{max} = F_{eng}, \quad \text{or} \quad v_{max} = \frac{F_{eng}}{B} = 20\text{m/s}$$

Por propiedad de **linealidad** de la **L** de la ecuación **(1)**:

$$L[mv'(t)] = L[F_{eng}(t)] - L[Bv(t)]$$

Como **m** y **B** son contantes, entonces: $m\, L[v'(t)] = L[F_{eng}(t)] - B\, L[v(t)]$ **(2)**

Cálculo de la **L** a cada término:

a) Para $L[(v'(t)]$ aplico **L** de derivadas: $L[f'(t)] = s\, L[f(t)] - f(0)$

Como por definición: $\mathbf{L}[f(t)] = F(s)$, resulta: $L[v\ \ (t)] = V(s)$

La transformada queda: $L[(v'(t)] = s\, L[v(t)] - v(0) = s\, V(s) - v(0)$

Así: : $L[(v'(t)] = s\, V(s) - v(0)$ **(I)**

b) Para $L[F_{eng}(t)]$ por definición: $L[f(t)] = F(s)$, $\rightarrow L[F_{eng}(t)] = F_{eng}(s)$ **(II)**

c) $L[v(t)] = V(s)$ **(III)** Reemplazo **(I)**, **(II)**, **(III)** en **(2)**:

$$ms\, V(s) - v(0) = F_{eng}(s) - B\, V(s)$$

v(0) = 0, (parte del reposo): $ms\, V(s) = F_{eng}(s) - B\, V(s)$

$$V(s)[ms + B] = F(s)$$

La **función de transferencia H(s)** (velocidad de salida dividida en fuerza de entrada) está dada por:

$$H(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + B}$$

Para $\mathbf{F_{max}}$: Fuerza máxima del motor.

Tabla de transformadas de Laplace		En este caso:	
Para función	Transformada	Para la función	Transformada
1/S	1	F(S)= Fmax / S	Fmax

$$V(s) = H(s)F(s) = \frac{1}{sm+B}\frac{F_{max}}{s} \quad \textbf{(3)}$$

Por definición de transformada inversa de **L**: $v(t) = L^{-1}\{V(s)\}$

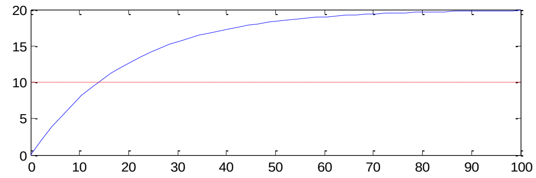
La expresión **(3)** tiene la forma de:

Tabla de transformadas de Laplace		En este caso:	
Para función	Transformada	Para la función	Transformada
(S+a).1/S	(1-e^{-st})1/a		

Aplicando la inversa de **L** obtenemos: $v(t) = \frac{F_{max}}{B}\left[1 - e^{-\frac{B}{m}t}\right]$

Reemplazando los valores: $$v(t) = \frac{50\frac{N\,seg}{m}20\frac{m}{s}}{50\frac{N\,seg}{m}}\left[1 - e^{-\frac{50\frac{N\,seg}{m}}{1000\,kg}t}\right] = 20\left[1 - e^{-0{,}05t}\right]$$

Velocidad (m/s)



Tiempo (s)

ANÁLISIS DE LA GRÁFICA Y CONCLUSIONES:

El vehículo alcanza los 10 m/s (36 km/h) luego de aproximadamente 13.85 s y luego continúa acelerando hasta los 20 m/s (72 km/h). Hay que tener en cuenta que los cálculos fueron realizados como si la máxima potencia del motor fuera alcanzado desde el momento del encendido, lo cual es físicamente imposible, pero al menos nos da una idea de la situación.

1) Mediante esta ecuación el controlador regula la fuerza que debe propulsar el motor para mantener la velocidad deseada constante.
2) En un automóvil con control de crucero la velocidad se sensa y se retroalimenta continuamente al sistema que ajusta la velocidad del motor por medio del suministro de combustible al mismo, en este último caso la salida del sistema sería la velocidad del motor, el controlador sería el sistema que decide cuanto combustible echar de acuerdo a la velocidad y la entrada sería la cantidad de combustible suministrado.
3) La ecuación será más compleja cuando las condiciones del camino sean más irregulares. Si el auto está ascendiendo por una pendiente, habrá una componente de la fuerza de la gravedad que se opondrá al movimiento. El auto moviéndose de manera descendente por una pendiente experimentará una componente de la fuerza de la gravedad que tenderá a acelerarlo.

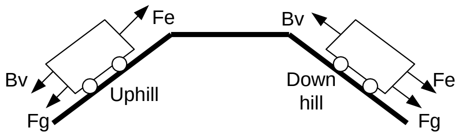
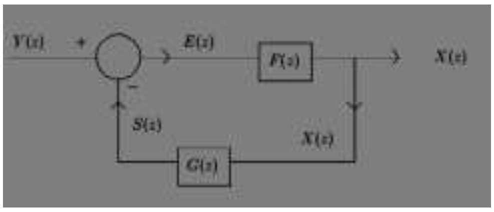


Diagrama de cuerpo libre incluyendo fuerzas externas

APLICACIÓN: FEEDBACK

Las funciones de transferencia del sistema de control por retroalimentación, buscan la solución transformada **Y(z)**, inicialmente obtenemos **X(z)** a partir del sistema dado por la función de transferencia **F(z)**. La función **X(z)** se transforma en el sistema dado por **G(z)** obteniéndose **S(z)**.



Finalmente **E(z) = Y (z) − S(z)**, que a su vez vuelve a ser utilizada para obtener una nueva **X(z)** mediante el proceso dado por la función de transferencia **F(z)**.

Buscamos la función de transferencia: $T(z)=\frac{X(z)}{Y(z)}$

Sabemos que: $X(z)=F(z)E(z)$ y $s(z)=G(z)X(z)$

Como $E(z)=Y(z)-S(z)$ → $X(z)=F(z)(Y(z)-S(z))=F(z)(Y(z)-G(z)X(z))$

De donde $T(z)=\frac{F(z)}{1+F(z)G(z)}$, a partir de esta función de transferencia podemos calcular la estabilidad del sistema de control por retroalimentación planteado calculando T(z).

Por ejemplo, si $F(z)=\frac{1}{(z^2+1)}$ y $G(z)=\frac{1}{(z-1)}$ entonces: $T(z)=\frac{z-1}{z^3+z^2+z}$

Y resolviendo: $z^3+z^2+z=0$, las raíces son: 0 y $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ → 0, 1.3, -0.36

Mediante el siguiente teorema podemos observar que el sistema será inestable:

Sea $L\{f(t)\}=F(s)=a_n(x-\beta)^n$, para las raíces β :

1. Si $\beta<0$, es asintoticamente estable.
2. Si $\beta\leq 0$ es estable
3. es inestable si no se cumplen las condiciones 1 y 2

Como tenemos a la raíz $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ q es β >0 el sistema **será inestable.**

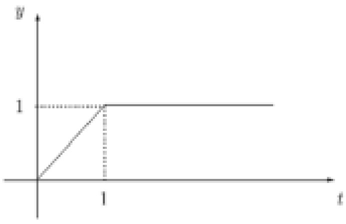
Ahora podemos expresar la ecuación diferencial lineal del sistema como:

$\frac{X(z)}{Y(z)}=\frac{z-1}{z^3-z^2+z}$ de donde: $X(z)(z^3+z^2+z)=Y(z)(z-1)$ y definiendo la Transformada Inversa

De L , como $L^{-1}\{F(t)\}=F(s)$, con su función de transferencia, tenemos que: x’’’-x’’+x’=y’-y

Para seguir conociendo la inestabilidad del sistema tenemos la función rampa que viene dada por:

$$y(t)=\begin{cases} t & \text{si } t\in[0,1), \\ 1 & \text{si } t\geq 1, \end{cases}$$



La L es: $Y(z)=L\{t(z)\}+L\{(t-1)(z)\}$ Aplico L por tabla

t^n Para: n = 1, 2, 3,	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ s > 0

y me queda como: $F(y)=\frac{1}{z^2}-\frac{e^{-z}}{z^2}=\frac{(1-e^{-z})}{z^2}$ Siendo F (y) la función solución de inestabilidad del sistema de control por retroalimentación “Feedback”.

El control de retroalimentación implica que se han reunido algunos datos, se han analizado y se han regresado los resultados a alguien o a algo en el proceso que se está controlando de manera que puedan hacerse correcciones. El inconveniente de este tipo de control es que en el momento en que el administrador tiene la información el daño ya está hecho, es decir, se lleva a cabo después de la acción.

Ejemplo: Se tiene una empresa que tiene 3 sucursales distribuidas por todo el país: Sucursal A, Sucursal B y Sucursal C. El gerente general ha detectado que la sucursal A tiene serios problemas financieros, mientras que sus otras dos sucursales están funcionando correctamente. Es aquí cuando el gerente debe decidir si esta información es causa suficiente para cerrar dicha sucursal o deberá cambiar las estrategias que han venido implementando.

Sucursal A - Bs. As. **Sucursal B - Córdoba** **sucursal C - Tucumán**

Dado $F(z) = \frac{1}{(z^2+1)}$ y $G(z) = \frac{1}{(z-1)}$ entonces: $T(z) = \frac{z-1}{z^3+z^2+z}$ función de transferencia;

Calculo un monto de ingreso mínimo (ponderado) para las 3 sucursales de 14.000.000 y calculo T(z):

$$T(z) = \frac{14000000-1}{14000000^3 + 14000000^2 + 14000000} = 5x10^{-15}.$$

Calculamos ahora con la función rampa: $F(y) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{(1-e^{-z})}{z^2} = \frac{(1-e^{-14x10^6})}{(14x10^6)^2} = 5x10^{-15}$

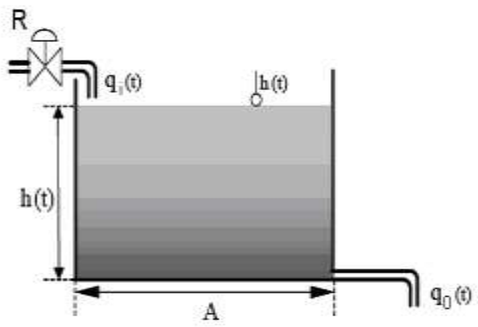
Analizando el Feedback, los dos métodos de medición (función de transferencia y función Rampa) deben dar el mismo resultado.

El resultado obtenido me indica la variación o inestabilidad q hay en la retroalimentación, como observamos, es un valor demasiado pequeño, como para tomar alguna decisión importante sobre la sucursal 1.

Suponemos que la sucursal 2 y 3 tienen un superávit, con lo cual llegan a cubrir su monto de ingreso mínimo, como así también el de la sucursal de Bs. As. El trabajo de la gerencia seria hacer más hincapié en los estados contables de Bs.As, hacer una política fuerte de planes de ahorro o firmar algún convenio con otras entidades, como para poder disminuir las pérdidas que se puede suponer que existe.

APLICACIÓN: NIVEL DE UN TANQUE

Flujo que entra – Flujo que sale = Acumulamiento



- $q_i(t)$= Flujo de entrada
- $q_0(t)$= Flujo de Salida
- A = Área del tanque
- (A una altura h)

$$q_i(t) - q_o(t) = A\frac{dh(t)}{dt} \quad \text{Si: } R = \frac{h(t)}{q_o(t)}$$

$$q_i(t) - \frac{1}{R}h(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

Nivel del tanque: $$q_i(t) - \frac{1}{R}h(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

$$q_i(t) = \frac{1}{R}h(t) + A\frac{dh(t)}{dt} \text{ Como } \rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = th(t) \rightarrow q_i(t) = \frac{1}{R}h(t) + Ath(t)$$

Saco factor común h(t): $$q_i(t) = h(t)(At + \frac{1}{R}) \rightarrow \frac{q_i(t)}{h(t)} = At + \frac{1}{R}$$

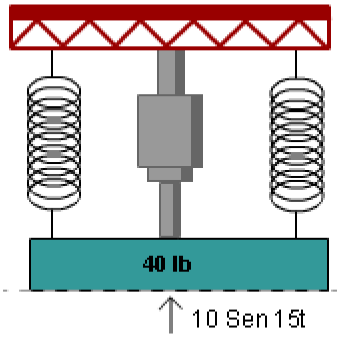
Invierto la Ecuación para obtener $\frac{h(t)}{q_i(t)}$ $$\rightarrow \frac{h(t)}{q_i(t)} = \frac{1}{At + \frac{1}{R}}$$

Aplico la transformada Inversa de Laplace:

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{A}L^{-1}\left\{\frac{1}{\left[t - \left(\frac{-1}{RA}\right)\right]}\right\}$$

La Función de Transferencia: $$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{A}\frac{t^0 e^{\left(\frac{-1}{RA}t\right)}}{1}$$

APLICACIÓN: AMORTIGUADOR



Determina la ecuación de movimiento de un cuerpo de 40 libras de peso está sujeto a dos resortes iguales y a un amortiguador. Si a partir del reposo se aplica una velocidad de $4 \frac{pulg.}{seg.}$ y un agente externo le comunica una fuerza constante de 10Sen (15t) libras.

Constante de cada resorte: **k =** $25 \frac{lb}{pulg}$;

Constante del amortiguador: **C =** $0.85 \frac{lb\,seg}{pulg}$.

Condiciones iniciales: **t = 0; y = 0**; $\frac{dy}{dt} = 4 \frac{pulg}{seg}$

Paso 1.- Planteo: $2\,k\,y + C\,\frac{dy}{dt} + m\,\frac{d^2y}{dt^2} = 10\,Sen\,15t$

Paso 2.-Sustituyo: $50\frac{lb}{pulg}y + 0.85\frac{lb\,seg}{pulg}\frac{dy}{dt} + \frac{40\,lb}{32.2\,\frac{pie}{seg^2}\left(12\frac{pulg}{pie}\right)}\frac{d^2y}{dt^2} = 10\,Lb\,Sen15t$

Paso 3.- Opero para dejar la derivada de mayor orden libre de coeficientes:

$$\frac{483}{seg^2}y + \frac{8.21}{seg}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2t}{dt^2} = 96.6\frac{pulg}{seg^2}Sen15t$$

Paso 4.- Aplico transformada a la ecuación considerando las condiciones iniciales:

$$483\mathbf{L}\{y\} + 8.21S\mathbf{L}\{y\} + S^2\mathbf{L}\{y\} - 4 = \frac{96.6(15)}{S^2+(15)^2}$$

Paso 5.-Factorizo la transformada: $(S^2 + 8.21S + 483)\mathbf{L}\{y\} = \frac{1449}{S^2+225} + 4$

Paso 6.-Despejo la transformada: $\mathbf{L}\{y\} = \frac{1449}{(S^2+225)(S^2+8.21S+483)} + \frac{4}{(S^2+8.21S+483)}$

Paso 7.- Aplicando la transformada inversa a toda la ecuación:

$$y\{t\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1449}{(S^2+225)(S^2+8.21S+483)}\right\} + \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(S^2+8.21S+483)}\right\}$$

Paso 8.- Como no hay fórmulas directas para resolver la expresión simplifico en una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1449}{(S^2+225)(S^2+8.21S+483)} = \frac{AS+B}{S^2+225} + \frac{CS+D}{S^2+8.21S+483)}$$

Paso 9.- Resuelvo y obtengo la ecuaciones:

A+C=0 ; 8.21A+B+D=0 ; 483A+8.21B+225C =0 ; 483B+225D=1449

Con lo que se obtiene: A= -0.145 ; B=4.57 ; C=0.145 ; D= -3.38

En el Mathematica el sistema de ecuaciones se puede resolver con la instruccion:

Solve[{a+c==0,8.21a+b+d==0,483a+8.21b+225c==0,483b+225d==1449}]

Paso 10.- Por lo que la transformada inversa queda:

Se suman: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left| \frac{-0.145S+4.57}{S^2+225} + \frac{0.145S-3.38}{S^2+8.2S+483} - \frac{4}{S^2+8.2S+483} \right|$

Paso 11.- Resolviendo por separado: $\mathcal{L}^{-1}\left| \frac{-0.145S+4.57}{S^2+225} \right| = -0.145Cos15t + 0.3Sen15t$

$\mathcal{L}^{-1}\left| \frac{0.145S+0.62}{(S+4.1)^2+466.2} \right| = e^{-4.1t}\mathcal{L}^{-1}\left| \frac{0.145S+0.025}{S^2+466.2} \right| =$

sustituyendo S=S - 4.1: $= e^{-4.1t}(0.145Cos21.6t + 0.001Sen21.6t)$

Paso 12.- La solución final, es:

y{t}= - 0.145Cos15t +0.3Sen15t+ $e^{-4.1t}(0.145Cos21.6t + 0.001Sen21.6t)$

Paso 13.- Haciendo A= $\sqrt{(-0.145)^2 + (0.3)^2} = 0.333$;

$\theta = Tang^{-1}\frac{-0.145}{0.3} = -25.8^o = -0.143\pi\, radianes$;

B=0 $\sqrt{(0.145)^2 + (0.001)^2} = 0.145$;

$\varphi = Tang^{-1}\frac{0.145}{0.001} = 89.6^o = 0.5\pi\, radianes$;

Se obtiene: y{t}=0.33Sen[15t - 0.143π]+0.145 $e^{-4.1t}Sen[21.6t + 0.5\pi]$. Resultado.

Paso 14.- El problema se puede resolver en el Mathematica, con la instrucción:

DSolve[{y''[t]+8.21y'[t]+483y[t]==96.6Sin[15 t],y[0]==0,y'[0]==4},y[t],t]

APLICACIÓN: IMAGENAS EN LA ATMOSFERA

Las inhomogeneidades atmosféricas varían en tiempos característicos de pocos milisegundos. Luego, para que las condiciones de la atmósfera no varíen durante la toma de una fotografía astronómica, el tiempo de exposición debe ser de este orden. En tales circunstancias, las imágenes presentan un patrón de interferencias de aspecto granulado, denominado moteado interferencial o speckle. Si se toma una serie de imágenes, el patrón de interferencias es distinto en todas ellas, ya que este patrón cambia con el tiempo al variar el estado de la atmósfera.
Por otra parte, en una fotografía astronómica convencional, el tiempo de exposición excede de un segundo y la imagen ya no es aleatoria sino un promedio de las imágenes de corta exposición que se denomina imagen de larga exposición.

Imagen de corta exposición

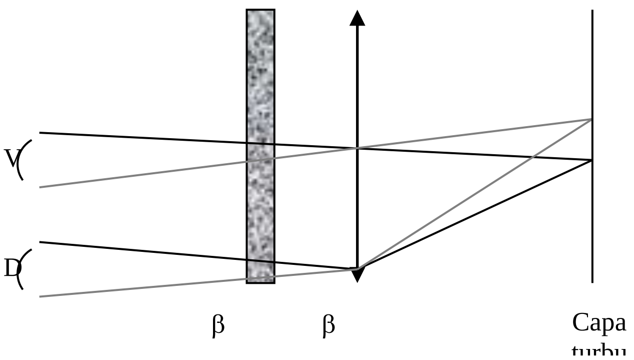
Relación objeto-imagen $f(t) = e^t$ y $g(t) = \operatorname{sen}(t)$

Sea $f(t) = e^t$ la distribución de intensidad del objeto en función del tiempo y $g(t) = sen(t)$ la distribución de intensidad en la imagen instantánea. La relación entre las distribuciones de intensidad de objeto e imagen es lineal porque los objetos astronómicos son totalmente incoherentes. Se asume además la invariancia frente a traslaciones, lo que implica que las perturbaciones instantáneas del frente de onda son idénticas para todas las direcciones del frente de onda.
Esta condición sólo se cumple si las capas turbulentas se hallan muy cerca de la pupila del telescopio, pero es evidente que esto no sucede en el caso de la atmósfera. Así que sólo se puede asumir la invariancia frente a traslaciones para objetos de pequeñas dimensiones angulares , lo que supone un campo de visión limitado denominado la zona isoplanática. Las estimaciones teóricas y experimentales muestran que en las imágenes astronómicas la zona isoplanática es del orden de unos pocos segundos de arco.

La imagen se relaciona con la distribución del objeto por una convolución:

$$L\{f * g\} = L\{f\}.L\{g\} = F(s).G(s)$$

Donde $L\{f * g\}$ es la imagen de un punto o función de ensanchamiento de punto (PSF) instantánea.
Si el objeto tiene unas dimensiones angulares suficientemente pequeñas o si la turbulencia se localiza cerca de la pupila del telescopio, se puede considerar que todos los haces que llegan a un punto de la pupila han atravesado las mismas zonas de la atmósfera.
Las aberraciones asociadas son isoplanáticas.



Problema: Las inhomogeneidades atmosféricas varían en tiempos característicos de pocos milisegundos. Por tanto, para que las condiciones de la atmósfera no varíen durante la toma de una fotografía astronómica. Lo que buscamos es calcular el tiempo t medido en milisegundos para obtener una fotografía astronómica. Se plantea las funciones la cuales están en función de una variable t, que indica el tiempo medido en milisegundos.

- $\mathbf{f_{(t)}} = \mathbf{e^t}$: Distribución de intensidad del objeto en función del tiempo
- $\mathbf{g_{(t)}}$ = sen (t) Distribución de intensidad en la imagen instantánea.

Partiendo de las funciones f y g con un tiempo t=0, nos planteamos a las funciones como un producto de funciones para luego aplicar el teorema de convolución.

Primer paso: plantear el producto de funciones con una integral que va a tener los límites de integración a partir de 0 y por la variable **t**. $\int_0^t e^t \operatorname{sen}(t - \sigma)\, d\sigma = f * g$ donde: $f(t) = e^t$ y $g(t) = \operatorname{sen}(t)$

Segundo paso: Con las funciones f y g en función del tiempo vamos a aplicar el teorema de la convolución realizando el producto de las transformadas de Laplace

Usando el teorema de convolución: $\int_0^t e^t \operatorname{sen}(t - \sigma)\, d\sigma = \boldsymbol{L}\{f(t)\}\, \boldsymbol{L}\{g(t)\}$

Tercer paso: Aplicando la tabla para resolver estas ecuaciones en forma mas practicas y sin hacer tantos cálculos de resolución de integrales

$$L\{f(t)\} = L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

y

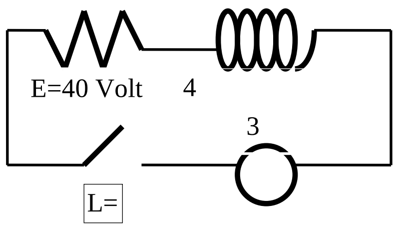
$$L\{g(t)\} = L\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Aplicado el teorema y la tabla llegamos a la ecuación donde la variable s, nos dará el resultado planteado.

$$L\left\{\int_0^t e^t \operatorname{sen}(t-\sigma)\, d\sigma\right\} = \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Donde $L\{f * g\}$ es la imagen de un punto o función de ensanchamiento de punto instantánea.

APLICACIÓN: CIRCUITO SERIE



Determinar la corriente I cuando t > 0, si se conectan en serie la resistencia de R = 10 Ohmios, la bobina de L = 10 Henrios y una batería de E = 40 Voltios y un interruptor S.
Cuando t = 0 el interruptor está cerrado y la corriente I = 0.

Por la ley de Kirchhoff se debe cumplir la igualdad
Caída potencial en R + Caída poten en L + Caída poten en E = 0

Con los datos: $10\,I + 2\dfrac{dI}{dt} + (-E) = 0$ de donde: $\dfrac{dI}{dt} + 5\,I = \dfrac{E}{2}$ Como E = 40 será

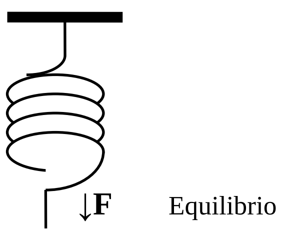
$\dfrac{dI}{dt} + 5\,I = 20$ I(o) = 0 o también **x'**(t) **+** 5 I = 20

Aplicando **L** : L{ x'(t) } **+** 5 L{ I } = L{ 20 } y como L{f '(t)} = s L{f(t)} - f(o)

$[\, s\,L - I(o)\,] + 5I = \dfrac{20}{s}$ donde I = L{I} I(o) = 0 , resolviendo respecto de I

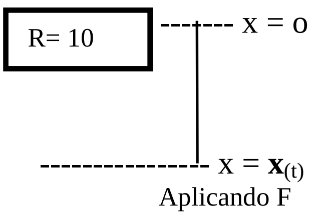
$$I = \frac{20}{s(s+5)} = \frac{20}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}\right) = 4\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}\right)$$ de donde: $I = 4\,(1 - e^{-5t})$

APLICACIÓN: MOVIMIENTO DE RESORTE



Despreciar fuerza de fricción y determinar la ecuación del movimiento del peso de 32 libras, sujeto al resorte de constante:
k = 16 libras/pie.
Cuando el peso llega a su posición de equilibrio, se aplica sobre el una fuerza de: F = Fo Sen wt (w: Frecuencia angular)

Si $\mathbf{x}_{(t)}$ es el desplazamiento hacia abajo de la posición de equilibrio, en



el tiempo t, la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales serán:

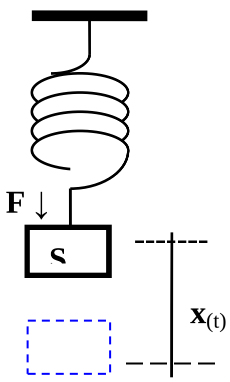
$\frac{d^2x}{dt^2}$ + 16 x = Fo Sen w t   Para x = 0 , w = 0 cuando t = 0

Si w = 4 produce la resonancia ideal, tal ecuación quedará como: $\frac{d^2x}{dt^2}$ + 16 x = Fo Sen 4 t, ó también: **x''**(t) + 16 x(t) = Fo Sen 4 t; que aplicando L será: L{ x''(t) } + 16 L{ x(t) } = L{ Fo Sen 4 t } y como la transformada L{f '(t)} = s L{f(t)} - f(o)

Para las condiciones iniciales $x_{(o)} = 0$ y $x'_{(o)} = 0$ resulta: $s^2 \mathbf{X}_{(s)} + 16 \mathbf{X}_{(s)} = \frac{4Fo}{s^2+16}$ de donde

$\mathbf{X}_{(s)} = \frac{4Fo}{(s^2+16)^2}$ Aplicando la tabla L el resultado será: $\mathbf{x}_{(t)} = \frac{Fo}{32}$ **(** Sen 4t - 4 t Cos 4t **)**

APLICACIÓN: MOVIMIENTO DE RESORTE II



Determinar la ecuación diferencial del movimiento de la masa m suspendida del extremo de un resorte vertical de constante k [Fuerza requerida para estirar el resorte una unidad], sobre el que actúa una fuerza externa F(x), así como una fuerza resistente proporcional a la velocidad instantánea.

Suponiendo que $\mathbf{x}_{(t)}$ es la elongación de la masa en el tiempo **t** y que la masa sale del reposo desde $\mathbf{x}_{(t)} = 0$; encontrar: $\mathbf{x}_{(t)}$ en un tiempo cualquiera **t**

Por la Ley de Newton, la fuerza **m** $\frac{d^2x}{dt^2}$, deberá estar equilibrada por la suma de las fuerzas:

- Fuerza resistente: **-b** $\frac{dx}{dt}$
- Fuerza de restauración del resorte: **-a x** $_{(t)}$.
- Fuerza externa actuante sobre la masa **F(t)**

Así: m $\frac{d^2x}{dt^2}$ = -b $\frac{dx}{dt}$ - ax + F(t), de donde obtenemos: m $\frac{d^2x}{dt^2}$ + b $\frac{dx}{dt}$ - ax = F(t) que escribir como:

m. x''(t) + b $x_{(t)}$ - a $x_{(t)}$ = F(t)

Aplicando L obtenemos: m L{ x''(t) } + b L{ x(t) } - a L{ x } = L{ F(t) }

Como L{f(t)} = F(s), L{x} = X y L{f '(t)} = s L{f(t)} - f(o) resultará:

m [s^{2}X - sx(o) - x'(o)] + b [sX - x(o)] + kX = F(s) y como x(o) = 0 x'(o) = 0

$x_{(t)} = \frac{F(s)}{ms^2+bs+k} = \frac{F(s)}{m[(s+b/2m)^2+R]}$; donde: $R = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$

<u>Caso R > 0:</u> Sea $R = w^2$ $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+b/2m)^2+w^2}\} = e^{-bt/2m}\dfrac{\operatorname{sen} wt}{w}$

Aplicando en: $x_{(t)} = \dfrac{F(s)}{m[(s+b/2m)^2+R]}$; el teorema de convolución $L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$

se obtiene la solución: $x_{(t)} = \dfrac{1}{wm}\int_0^t F(u)\,e^{-b(t-u)/2m}\operatorname{sen} w(t-u)\,du$

<u>Caso R = 0</u>: Se produce $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+b/2m)^2}\} = t\,e^{-bt/2m}$

Aplicando el teorema de convolución en $x_{(t)} = \dfrac{F(s)}{m[(s+b/2m)^2+R]}$ se obtiene la solución

Aplicando en: $x_{(t)} = \dfrac{F(s)}{m[(s+b/2m)^2+R]}$ el teorema de convolución: $L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$

se obtiene la solución: $x_{(t)} = \dfrac{1}{m}\int_0^t F(u)\,(t-u)e^{-b(t-u)/m}\,du$

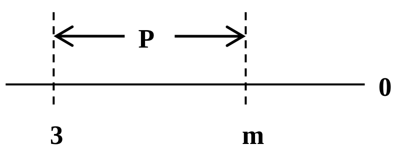
<u>Caso R < 0</u>:

Será $R = a^2$; se produce $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+b/2m)^2+a^2}\} = e^{-bt/2m}\dfrac{Senhat}{a}$

Aplicando en $x_{(t)} = \dfrac{F(s)}{m[(s+b/2m)^2+R]}$ el teorema de convolución

$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$, se obtiene la solución: $x = \dfrac{1}{am}\int_0^t F(u)\,e^{-b(t-u)/2m}\,\mathrm{Senh}\,a(t-u)du$

APLICACIÓN: POSICIÓN DE PARTICULAS



La partícula P de 2 gr de masa se mueve sobre el eje x, y es atraída hacia el origen con una fuerza de *8X*. Hallar su posición para un tiempo suponiendo que no actúan otras fuerzas y que inicialmente en reposo *X* = 10

Para la dirección positiva hacia la derecha, cuando:

- X > 0, la fuerza neta es hacia la izquierda (es negativa) y estará dada por –*8X*.
- X < 0, la fuerza neta es hacia la derecha (es positiva) y estará dada por –*8X*
- Así, siempre la fuerza neta es –*8X*, luego por Newton: Masa x Aceleración = Fuerza:

$2 * \dfrac{d^2X}{dt^2} = -8X$ o sea $\dfrac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0$

La L de $\dfrac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0 \rightarrow x = \mathcal{L}\{X\}$; luego $s^2x - 10s + 4x = 0 \rightarrow x = \dfrac{10s}{s^2+4}$

Entonces: $X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t$

APLICACIÓN: MOVIMIENTO DE PARTICULAS

Una partícula de masa **m** se mueve el eje **X** y es atraída hacia el origen **0** con una fuerza numéricamente igual a **kx, k > 0**. Actúa una **Fuerza amortiguadora** = $\beta \frac{dX}{dt}$, para $\beta > 0$.

Discutir el movimiento; considerar todos los casos, suponiendo que $X(0) = X_0$, $X'(0) = V_0$.

La ecuación del movimiento es $m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt}$

O sea $\frac{d^2X}{dt^2} + 2a\frac{dX}{dt} + \omega^2 X = 0$ (1) donde $\alpha = \beta/2m,\ \omega^2 = k/m$.

Al usar las condiciones iniciales, la L de (1):

$s^2x - X_0 s - V_0 + 2\alpha(sx - X_0) + \omega^2 x = 0$, osea

$$x = \frac{sX_0 + (V_0 + 2\alpha X_0)}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2} = \frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$$

Caso 1: $\omega^2 - \alpha^2 > 0$.

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = X_0 e^{-\alpha t}\cos\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\,t + \frac{(V_0 + \alpha X_0)}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}\,e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\,t$$

El movimiento se llama oscilatorio amortiguado. La partícula oscila alrededor de 0, y la magnitud de cada oscilación va haciéndose menor cada vez. El período de la oscilación está dado por $2\pi/\sqrt{\omega - \alpha^2}$, y la frecuencia por $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}/2\pi$.

La cantidad $\omega/2\pi$ (correspondiente al caso $\alpha = 0$, es decir sin amortiguación) se llama la frecuencia natural.

Caso 2: $\omega^2 - \alpha^2 = 0$.

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\} = X_0 e^{-\alpha t} + (V_0 + \alpha X_0)te^{-\alpha t}$$

Aquí la partícula no oscila indefinidamente alrededor de 0 sino que se aproxima gradualmente a 0 sin llegar a alcanzarlo. Este tipo de movimiento se llama movimiento críticamente amortiguado, puesto que cualquier disminución de la constante de amortiguación β producirá oscilaciones

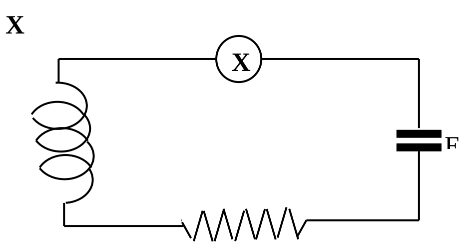
Caso 3, $\omega^2 - \alpha^2 < 0$.

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)}\right\}$$

$$= X_0 \cosh \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}\, senh\sqrt{\alpha^{2-\omega^2}}\, t$$

El movimiento se llama sobre-amortiguado y es no oscilatorio.

APLICACIÓN: CARGA DEL CIRCUITO EN SERIE



Un inductor de 2 henrys, una resistencia de 16 ohmios y un condensador de 0,02 faradios se conectan en serie con una f.e.m. de *E* voltios.

En t = 0 tanto la carga del condensador como la corriente del circuito valen cero.

Encontrar la carga y la corriente en cualquier tiempo t > 0 si

- E = 300 (voltios),
- E = 100 Sen 3t (voltios).

Sean Q e I respectivamente la carga y corriente instantánea en el tiempo t. Por las leyes de Kirchhoff tenemos: $2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0{,}02} = E$ (1) y como $I = dQ/dt$, $2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E$ (2)

bajo las condiciones iniciales $Q(0) = 0$, $I(0) = Q'(0) = 0$.

- Si **E = 300** voltios, entonces (2) será. $\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 50Q = 150$

  Por **L** encontramos que $\{s^2q - sQ(0) - Q'(0)\} + 8\{sq - Q(0)\} + 25q = \frac{150}{s}$

  o $q = \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)} = \frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{s^2 + 8s + 25} = \frac{6}{s} - \frac{6(s+4) + 24}{(s+4)^2 + 9}$

  $= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2 + 9} - \frac{24}{(s+4)^2 + 9}$

  Luego, $Q = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}sen3t$ $\quad I = \frac{dQ}{dt} = 50e^{-4t}sen3t$

- Si **E = 100 Sen 3t** voltios, entonces (2)es en este caso: $\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50sen3t$

  La $\mathcal{L}$: $(s^2 + 8s + 25)q = \frac{150}{s^2 + 9}$

  y $q = \frac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)} = \frac{75}{26}\frac{1}{s^2 + 9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2 + 9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2 + 9}$

  Así: $Q = \frac{25}{26}sen3t - \frac{75}{52}sen3t + \frac{25}{26}e^{-4t}sen3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t$

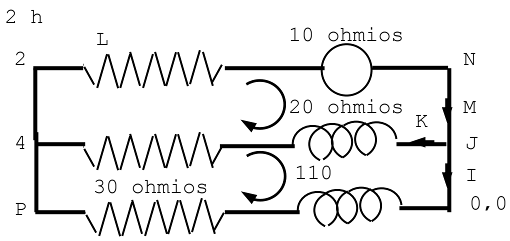
  $= \frac{25}{52}(2sen3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2sen3t)$

  y entonces $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3sen3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17sen3t + 6\cos 3t)$

  Para grandes valores de *t*, los términos de *Q* o de *I* en que aparece e^{-4t} son despreciados y se llaman los términos transitorios o la parte transitoria de la solución. Los otros términos se llaman los términos permanentes o la parte permanente de la solución.

APLICACIÓN: CORRIENTES DE CIRCUITOS

En la malla eléctrica, determinar las corrientes de las diferentes ramas, si las corrientes iniciales valen cero.



- La 2da ley de Kirchhoff dice que la suma algebraica de las caídas de voltaje alrededor de cualquier malla cerrada es cero.
- Recorriendo las mallas KLMNK y JKNPJ en sentido de las agujas del reloj, serán positivas las caídas de voltaje, cuando el recorrido va en sentido opuesto a la corriente. Y una subida del voltaje se considera una caída de voltaje con signo opuesto.

Sea en el nudo K, I la corriente en NPJK, que se divide I_1 y I_2 en tal forma que $I = I_1 + I_2$. Esto es equivalente a la 1ra ley de kirchhoff .

Aplicando la 2da ley de Kirchhoff en la malla:

- KLMNK: $-10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0$ ó $-5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dt_2}{dt} + 10I_2 = 0$, para las condiciones $I_1(0) = I_2(0) = 0$

- JKNPJ: $30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0$ ó $\frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55$, para las condiciones $I_1(0) = I_2(0) = 0$

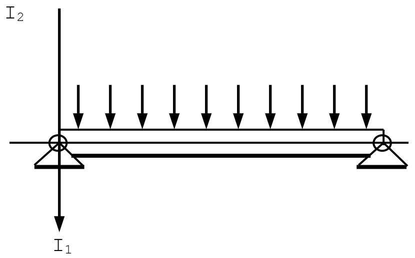
La $\mathcal{L}$ para las condiciones iniciales es: $-5i_1 - \{si_1 - I_1(0)\} + 2\{si_2 - I_2(0)\} + 10i_2 = 0$

$\{si_1 - I_1(0)\} + 20i_1 + 15i_2 = 55/s$, o sea: $(s+5)i_1 - (2s+10)i_2 = 0$ ó $(s+20)i_1 + 15i_2 = 55/s$

Por la 1ª ecuación, $i_1 = 2i_2$, la 2ª ecuación da $(2s+55)i_2 = \frac{55}{s}$ ó $i_2 = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$

Entonces: $I_2 = 1 - e^{-55t/2}$ $I_1 = 2I_2 = 2 - 2e^{-55t/2}$ $I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}$

APLICACIÓN: DEFLEXIÓN DE VIGAS



Hallar la deflexión en cualquier punto de una viga fija que en sus extremos x = 0 y x = l soporta una carga uniforme W_o por unidad de longitud.

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera son

- $\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI}$ $0 < x < 1$ (1)
- $Y(0) = 0,\ Y'(0) = 0,\ Y''(0) = 0,\ Y'''(0) = 0$ (2)

La L en los miembros de (1) tenemos que, si $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$,

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EIs} \qquad (3)$$

Empleando en (2) las dos primeras condiciones y las condiciones desconocidas $Y'(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$, encontramos que: $y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}$

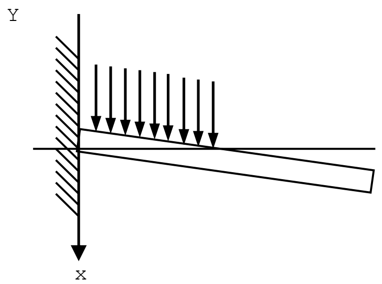
Invirtiendo términos: $Y(x) = c_1x + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} = c_1x + \frac{c_2x^3}{6} + \frac{W_0x^4}{24EI}$

De las dos últimas condiciones de (2) obtenemos: $c_1 = \frac{W_0l^3}{24EI}$, $c_2 = -\frac{W_0l}{2EI}$

La deflexión buscada es: $Y(x) = \frac{W_0}{24EI}\left(l^3x - 2lx^3 + x^4\right) = \frac{W_0}{24EI}x(l-x)\left(l^2 + lx - x^2\right)$

APLICACIÓN: DEFLEXION EN VIGA VOLADIZA

Una viga voladiza asegurada en el extremo $x = 0$ y libre en el extremo $x = 1$, soporta una carga $W(x)$ por unidad de longitud dada por



$W_0 \quad 0 < x < l/2 \qquad W(x) = 0 \qquad l/2 < x < l$

Hallar su deflexión

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera son

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$Y(0) = 0,\ Y'(0) = 0,\ Y''(l) = 0,\ Y'''(l) = 0 \qquad (2)$$

Para aplicar L , extendemos la definición de $W(x)$ de la siguiente manera:

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \qquad (3)$$

Por la función unitaria de Heaviside w' se expresa $W(x) = W_0\{u(x) - u(x - l/2)\}$ (4)

Tomando L de (1) tenemos que, si $y = y(s) = \mathcal{L}|Y(x)|$,

Entonces: $s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EI}\left\{\frac{1 - e^{-sl/2}}{s}\right\}$

De las dos primeras condiciones de la fórmula (2) y de las condiciones desconocidas $Y''(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$ encontramos que: $y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}\{1 - e^{-sl/2}\}$

Invirtiendo los términos: $Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} - \frac{W_0}{EI}\frac{(x - l/2)^4}{4!}u(x - l/2)$

Lo cual es equivalente a: $\frac{c_1x^2}{2!} + \frac{1}{6}c_2x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 \qquad 0 < x < l/2$

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{1}{6}c_2x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 - \frac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4 \qquad x > l/2$$

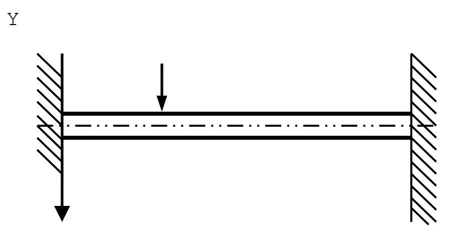
Por las condiciones $Y''(l) = 0,\ Y'''(l) = 0 \rightarrow c_1 = \frac{W_0l^2}{8EI}$, $c_2 = \frac{W_0l}{2EI}$ Asi la deflexión requerida es

$$Y(x) = \frac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \frac{W_0l}{12EI}x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 - \frac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4u(x - l/2) = \frac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \frac{W_0l}{12EI}x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4$$

$0 < x < l/2$, o sea Y(x)= $\frac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \frac{W_0l}{12EI}x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 - \frac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4 \qquad l/2 < x < l$

APLICACIÓN: DEFLEXION EN VIGA EMPOTRADA

Una viga tiene empotrados sus extremos en $x = 0$ y $x = 1$. En el punto $x = l/3$, actúa, verticalmente hacia abajo, una carga concentrada P_0. Hallar la deflexión resultante.



La carga concentrada en $x = l/3$ es $P_0\delta(x - l/3)$ donde δ es la función delta de Dirac o función de impulso.

La ecuación diferencial de deflexión y sus condiciones de frontera son: $\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}\delta(x - l/3)$ (1)

$$Y(0) = 0,\ Y'(0) = 0,\ Y(l) = 0,\ Y'(l) = 0, \qquad (2)$$

Por L , si $y = \mathcal{L}|Y(x)|$ tendremos que: $s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{P_0}{EI} e^{-ls/3}$ (3)

Llamo: $Y''(0) = c_1$ y a $Y'''(0) = c_2$, por las condiciones de (2): $y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI}\frac{e^{-ls/3}}{s^4}$ (4)

Al invertir: $Y(x) = \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{P_0}{EI}\frac{(x - l/3)^3}{3!} u(x - l/3)$ (5)

que equivale a: $\frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{6} c_2 x^3$ $0 < x < l/3$

$Y(x) =$ $\frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{6} c_2 x^3 + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3$ $l/3 < x < l$

De las dos últimas condiciones de (2) hallamos: $c_1 = \frac{4P_0 l}{27EI}$, $c_2 = \frac{-20P_0}{27EI}$

Entonces la deflexión requerida es: $Y(x) = \frac{2P_0 l x^2}{27EI} - \frac{10P_0 x^3}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 u(x - l/3)$

$\frac{2P_0 x^2(3l - 5x)}{81EI}$ $0 < x < l/3$

o sea: $Y(x) = \frac{2P_0 x^2(3l - 5x)}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3$ $l/3 < x < l$

APLICACIÓN: PESO SUSPENDIDO EN RESORTE

Un peso de 16 libras suspendido de un resorte lo estira 2 pies. En el instante $t = 0$ el peso se halla 3 pies por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. Asuma una fuerza amortiguadora de 4 veces la velocidad instantánea. En el instante $t = 2$ el peso recibe un golpe seco, desde abajo, que transmite 2 unidades de momento a la masa; además, en el instante $t = 4$ se activa una fuerza externa con una magnitud de 4 unidades. Entonces

1. Determine la ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimiento.
2. Encuentre la posición del peso en cualquier instante t.
3. ¿Cuál es la posición del peso en $t = 5$?

Para hallar la constante del resorte: F=ks → 16=2k → k=8. Luego el modelo matemático es

.x''+8x'+16x=2(-2δ(t-2)+4H(t-4)) → x(o) = 3 → x'(o) = 0 $e^{-st} f_{(t)}$

Aplicando L : $s^2X(s)-sx(o)-x'(o)+8sX(s)-8x(o)+16X(s)= -4 e^{-2s} +8 e^{-4s} s^{-1}$

$(s+4)^2X(s) = 3s+3 - 4 e^{-2s} +8 e^{-4s} s^{-1}$ → $X(s)= \frac{3s+3}{(s+4)^2} - \frac{4e^{2s}}{(s+4)^2} + \frac{8e^{-4s}}{s(s+4)^2} =$

El 2 que acompaña a la función delta se debe a que el golpe es desde abajo con una intensidad de 2 unidades, además recuerde que $x(0) = 3$, pues el peso esta por debajo de la posición de equilibrio. Aplicando fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{3}{s+4} - \frac{9}{(s+4)^2} - \frac{4e^{-2s}}{(s+4)^2}$$

$$+\frac{8e^{-4s}}{s+4}-\frac{32e^{-4s}}{s(s+4)^2}$$

De donde obtenemos que

$$x(t) = 3e^{-4t} - 9te^{-4t} - 4(t-2)e^{-4(t-2)}H(t-2) + 8e^{-4(t-2)}H(t-4)$$

$$- 32(t-4)e^{-4(t-4)}H(t-4) - 32$$

Y así $x(5) = 0{,}45137$. La gráfica de $x(t)$ se muestra en la siguiente figura

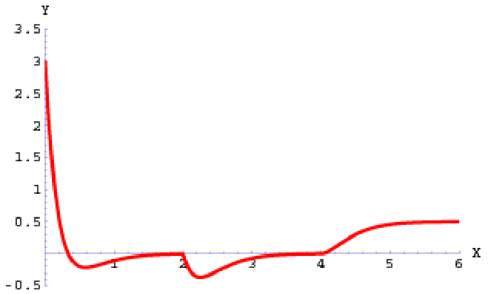


TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	L{ f(t) } = F(s)	**.f(t)**
1	1 / s	1
2	1 / s^2	T
3	$\frac{1}{s^n}$ n = 1,2,3,.......	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, 0! = 1
4	$\frac{1}{s^n}$ n > 0	$\frac{t^{n-1}}{r(n)}$
5	1 / (s-a)	e^{at}
6	$\frac{1}{(s-a)^n}$ n = 1,2,3,....	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$, 0! = 1
7	$\frac{1}{(s-a)^n}$ n > 0	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{r(n)}$

8	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{sen\,at}{a}$
9	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
10	$\dfrac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\,sen\,at}{a}$
11	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
12	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{senh\,at}{a}$
13	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
14	$\dfrac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\,senh\,at}{a}$
15	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
16	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
17	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
18	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{sen\,at-at\cos at}{2a^3}$
19	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\,sen\,at}{2a}$
20	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{sen\,at+at\cos at}{2a}$
21	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at-\dfrac{1}{2}at\,sen\,at$
22	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
23	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at-senh\,at}{2a^3}$
24	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\,senh\,at}{2a}$
25	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{senh\,at-at\cosh at}{2a}$
26	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at-\dfrac{1}{2}at\,senh\,at$

27	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
28	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)sen\ at-3at\cos at}{8a^5}$
29	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\ sen\ at-at^2\cos at}{8a^3}$
30	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)sen\ at-3at\cos at}{8a^5}$
31	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\cosh at+\dfrac{1}{2}at\ senh\ at$
32	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)sen\ at+5at\cos at}{8a}$
33	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at-7at\ sen\ at}{8}$
34	$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\ sen at}{2a}$
35	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2\cos at$
36	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3\cos at$
37	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\ sen\ at}{24a}$
38	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\mathrm{senh}\ at-3at\cosh at}{8a^5}$
39	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at-t\ \mathrm{senh}\ at}{8a^3}$
40	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at+(a^2t^2-1)\mathrm{senh}\ at}{8a^3}$
41	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\ \mathrm{senh}\ at+at^2\cosh at}{8a}$
42	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\mathrm{senh}\ at+5at\cosh at}{8a}$
43	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at+7at\ \mathrm{senh}\ at}{8}$
44	$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\ \mathrm{senh}\ at}{2a}$
45	$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2\cosh at$

46	$\dfrac{s^4 + 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 - a^2)^4}$	$\dfrac{1}{6} t^3 \cosh at$
47	$\dfrac{s^3 + a^2 s}{(s^2 - a^2)^4}$	$\dfrac{t^3 \operatorname{senh} at}{24a}$
48	$\dfrac{1}{(s^2 + a^2)^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$
49	$\dfrac{s}{s^3 + a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2} - e^{-3at/2}\right\}$
50	$\dfrac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at} + 2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
51	$\dfrac{1}{s^3 - a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right\}$
52	$\dfrac{s}{s^3 - a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$
53	$\dfrac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at} + 2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
54	$\dfrac{1}{s^4 + 4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}(\operatorname{sen} at \; \cosh at - \cos at \; \operatorname{senh} at)$
55	$\dfrac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at \; \operatorname{senh} at}{2a^2}$
56	$\dfrac{s^2}{s^4 + 4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\operatorname{sen} at \; \cosh at + \cos at \; \operatorname{senh} at)$
57	$\dfrac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \; \cosh at$
58	$\dfrac{1}{s^4 - a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{senh} at - \operatorname{sen} at)$
59	$\dfrac{s}{s^4 - a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\cosh at - \cos at)$
60	$\dfrac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\operatorname{senh} at + \operatorname{sen} at)$
61	$\dfrac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\cosh at + \cos at)$
62	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
63	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

64	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
65	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
66	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$
67	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$
68	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos at-\cos bt)}{t}$
69	$tan^{-1}(a/s)$	(Sen at) / t
70	U(t – k)	e^{-ks} / s k > 0
71	$t^n e^{k.t}$	$\dfrac{n!}{(s-k)^{n+1}}$
72	$\mathbf{e}^{\alpha t}$	1 / (s -a) s > a
73	$\dfrac{1}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$