MATEMATICA SUPERIOR APLICADA

Wilo Carpio Cáceres

2013

A Roberto.. mi padre !!

Cuando se diseña un modelo teórico matemático, se busca idealizar y comprender un fenómeno real, pretendiendo imitar su comportamiento, para describir su funcionamiento e interrelación operativa entre sus componentes, para luego, representarlas mediante algoritmos matemáticos, los cuales, serán útiles cuando mejor reflejen las características del fenómeno real estudiado.
Captar el funcionamiento de un sistema real, implica que el fenómeno estudiado, sea entendido, controlado y administrado para lograr algun objetivo, como incrementar el avance tecnologico, para mejorar la calidad de vida de la sociedad.
Representar un fenómeno real mediante un algoritmo matemático, requiere un proceso operacional

Ejemplo:

- **Descubrir la ECUACIÓN DIFERENCIAL** que mejor describa un fenómeno físico.
  Para esto:
  - **Plantear el fenómeno real** en términos de algoritmos matemáticos.
  - **Modelar**, simular, analizar los algoritmos.
  - **Interpretar** resultados de la simulación matemática.
- **Encontrar** la solución apropiada para tal ecuación. Ejemplos:

Ley de	Fenómeno físico	Ecuación diferencial	Parámetros
1. Enfriamiento de Newton	**Variación de temperatura:** T(t) Del cuerpo respecto al tiempo **t** es proporcional a la diferencia entre **T** y la temperatura **A** del medio donde esta inmerso el cuerpo	$\frac{dT}{dt}$ = k(A – T).	1. K: Constante positiva 2. A: Temp. medio ambiente 3. .t: Tiempo 4. T Temperatura del cuerpo.
2. Ecuación De Onda	**Vibración de una cuerda**: Ecuación diferencial en derivadas parciales de 2do orden:	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$	.t: Tiempo .x: Coordenada del punto sobre la cuerda
3. Torricelli	**Tanque que se vacía**: Volumen agua **V** del tanque que se vacía, respecto del tiempo **t**, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad **h**	$\frac{dV}{dt}$ = k $\sqrt{h}$	1. K: Constante positiva 2. h: Profundidad 3. .t: Tiempo
4. Dinámica Estructural	**Desplazamientos de Masa**: Ecuación de 2do grado respecto del desplazamiento **x** y su 1ra y 2da derivada respecto al tiempo **t**.	$\mathbf{P_{(t)} = Mx''_{(t)} + Cx'_{(t)} + Kx_{(t)}}$	M: Matriz de masa C: Matriz amortiguación K: Matriz de rigidez X: Vector desplazamiento P: Vector de fuerzas. t : Tiempo.
5. Variación de población	**Variación de poblacional**: Indices de nacimiento y mortalidad, respecto del tiempo **t**, proporcional al tamaño **P**: población	$\frac{dP}{dt}$ = k P.	1. K: Constante positiva 2. P: Tamaño de población 3. .t:Tiempo

ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es la igualdad que contiene términos infinitesimales, tales como derivadas, diferenciales o integrales, las cuales establecen una relación entre la variable independiente **x**, la función buscada $y = f_{(x)}$ y sus derivadas **y', y''... y^n.**

Ejemplo:

y' = 2xy + 1 Ecuación diferencial ordinaria, donde:

- $y = f_{(x)}$: **variable dependiente** o **función incógnita**.
- **x** : **variable independiente**.
- $y' = \frac{dy}{dx}$: **derivada de y con respecto a x**

- **ORDEN** de la ecuación diferencial
  Dada por **el orden de la derivada de mayor orden**

Ejemplo:

- ✓ $(y'')^4 + 3xy''' = \frac{x}{y}$: Ecuación de orden 3.
- ✓ $y'' + 6xy' + 4y = 1$: Ecuación de orden 2.

- **GRADO** de la ecuación diferencial
  Es **el exponente de la derivada de mayor orden**
  Si la ecuación debe no tiene forma polinómica, no tiene grado

Ejemplo:

- ✓ $(y'')^4 + 3xy''' = \frac{x}{y}$: Ecuación de 1er grado

CLASIFICACIÓN: ECUACIÓN DIFERENCIAL

ORDINARIA Tiene una variable independiente y derivadas ordinarias respecto a ella de la forma: $\frac{dy}{dx}$

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} - f_{(x)} = 2$

PARCIAL Posee variables dependientes en función de más de la variable independiente y opera derivadas parciales de la forma: $\frac{\partial y}{\partial x}$

Ejemplos: $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0;\qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

La solución de la ecuación diferencial es aquella función, que reemplazada en la función incógnita, verifica la ecuación. Tal solución puede ser:

- **Solución general**: Solución de tipo genérico que es un **haz de curvas**, expresada con una o más constantes. Tiene un orden de infinitud de acuerdo a su cantidad de constantes.

- **Solución particular**: Pasa por: $P(x_{(o)}, y_{(o)})$, punto de la solución de la ecuación diferencial, en un único valor de **C**, de la curva integral que satisface la ecuación, en el punto $P(x_{(o)}, y_{(o)})$ ó **condición inicial**.

- **Solución singular**: Función no obtenida particularizando la solución general que verifica la ecuación.

La solución de la ecuación diferencial es la función encontrada mediante un método específico o alguna transformada. Ejemplo: Transformada de Laplace.

Por otra parte, recordando que en matemáticas las **IGUALDADES** pueden ser:

- **IDENTIDADES**: Si se verifican cualquiera sea el valor de las incógnitas
  Ejemplo: $\mathbf{3^2x^2y^2 - 2^2y^4 = (3xy + 2y^2)(3xy - 2y^2)}$

- **ECUACIONES**: Si se verifican para algún/os valor/es de la/s incógnita/s.
  Ejemplo: $\mathbf{3xy^2 - 2^2y^4 = (3xy + 2y^2)(3xy - 2y^2)}$

Según esto, a diferencia del álgebra, una solución determina valores de la incógnita X que satisface a una ecuación como 4X + 2 = 0, **la ecuación diferencial busca la función desconocida** $\mathbf{y = f_{(x)}}$ **que satisface a una identidad** $\mathbf{f'_{(x)} + 3X = 0}$

Ejemplo: Para la ecuación diferencial. $\mathbf{y'' - 2y' + y = 0}$

- Una solución puede ser la función $\mathbf{y = e^x}$ Si verificamos tendremos:

$$
\begin{array}{ll}
y = e^x & y'' - 2y' + y = 0 \quad \text{reemplazando sus valores} \\
y' = e^x & e^x - 2e^x + e^x = 0 \\
y'' = e^x & -e^x + e^x = 0 \\
 & e^x = e^x \quad \text{esto es una identidad}
\end{array}
$$

- Otra solución sería la función $\mathbf{y = x\,e^x}$ Si verificamos tendremos:

$$
\begin{array}{ll}
y = x\,e^x & y'' - 2y' + y = 0 \\
y' = e^x + x\,e^x & e^x + e^x + x\,e^x - 2(e^x + x\,e^x) + x\,e^x = 0 \\
y'' = e^x + e^x + x\,e^x & e^x + e^x + x\,e^x - 2\,e^x - 2x\,e^x + x\,e^x = 0 \quad 0 = 0 \quad \text{esto es una identidad}
\end{array}
$$

Luego, **la misma ecuación diferencial puede tener como solución a mas de una función**, así, para determinar la solución buscada para el tipo de fenómeno físico que queremos describir, la ecuación diferencial necesita de ciertos parámetros llamados

CONDICIONES DE CONTORNO: Bajo las cuales se cumple el proceso físico que describe el modelo matemático desarrollado.

CONDICIÓN INICIAL: De partida $\mathbf{y(x_{(o)}) = y_{(o)}}$ del fenómeno estudiado. Si: $\mathbf{x_{(o)}} = 0$ resolver el problema de valor inicial de $\mathbf{y' = f_{(x,y)}}$ para la condición inicial $\mathbf{y(x_{(o)}) = y_{(o)}}$, significa encontrar una función diferenciable $\mathbf{y_{(x)}}$ para ambas condiciones:

- De la ecuación diferencial: $\mathbf{y' = f_{(x,y)}}$ despejamos: $\mathbf{dy = f(x, y)dx}$, e integrando ambos miembros $\int \mathbf{dy} = \int \mathbf{f(x, y)dx}$, tenemos la solución general: $\mathbf{y = \int f_{(x,y)}\, dx + C}$, donde **C** es la constante de integración.

- Si $\mathbf{G(x)}$ es una antiderivada de $\mathbf{f(x)}$ [Osea que: G'(x) = f(x)], luego reemplazando en la solución general $\mathbf{y = \int f_{(x,y)}\, dx + C}$, obtenemos: $y = \mathbf{G_{(x)}} + C$

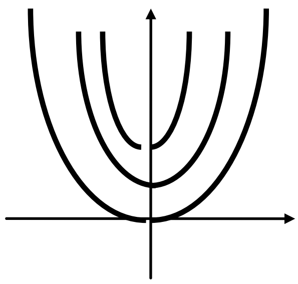
- Para satisfacer la condición inicial $\mathbf{y(x_{(o)}) = y_{(o)}}$ sustituyendo $x = x_o$ e $y = y_o$ en $y = \mathbf{G_{(x)}} + C$ obtenemos $y_o = G(x_o) + C$, de donde $C = \mathbf{y_{(o)}} - G(\mathbf{x_{(o)}})$.

- La solución particular será: $\mathbf{y} = \int f(x, y)\, dx + C = \int \mathbf{f(x, y)\, dx + [y_{(o)} - G(x_{(o)})]}$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial: **y' = 2 x**, para $x_o = 0$, $y_o = 0$

SOLUCION GENERAL:

Es la función **y = f(x) + c** que transforma **y' = 2 x** en identidad, donde c se define por las condiciones iniciales, así se genera una familia de curvas.



De: $\frac{dy}{dx} = 2x$; $\rightarrow dy = 2x \cdot dx \rightarrow \int dy = \int 2x.dx$;

resulta $y = 2\frac{x2}{2} + c$ $\quad$ **$y = x^2 + c$**

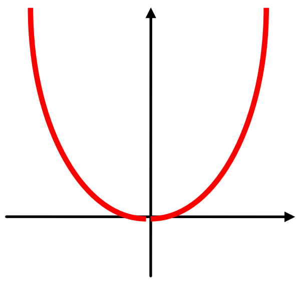
SOLUCION PARTICULAR:

Con la condición inicial **$y(x_0) = y_0$**, para la solución particular es: **$c = y_0 - G(x_0)$**

Reemplazo **$x_o = 0$, $y_o = 0$** en **$c = y_0 - G(x_0) = 0$**,

Reemplazo **c = 0** en la solución general **$y = x^2 + c$**

$.y = x^2 + 0$ resulta la solución particular **$y = x^2$**



INTEGRACION DIRECTA

Para resolver la ecuación diferencial de forma:

$G_{(y)}dy = F_{(x)}dx$

- Integrar ambos miembros:

$\int G_{(y)}dy = \int F_{(x)}dx$

En la práctica todos los métodos de solución de ecuaciones diferenciales concluyen en esta instancia

Ejemplo:

Resolver: **dy = 4xdx +3dx**

- **$\int dy = 4\int xdx + 3\int dx$**
- **$y = 2x^2 + 3x + c$**

Ejemplo: Para resolver: **$dy = 2x^2dx - \frac{1}{3}Cos\ x\ dx + \frac{4}{x}dx$**

Integro directamente ambos miembros: **$\int dy = 2\int x^2dx - \frac{1}{3}\int Cos\ x\ dx + \frac{4}{x}\int dx$**

$$y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}Sen\ x + 4\ln x + c$$

Ejemplo: Para resolver: **$dy = 5x^3dx + Sen\ x - 2x$**

Integro directamente ambos miembros: **$\int dy = 5\int x^3dx - \int Sen\ x\ dx + 2\int xdx$**

$$y = \frac{5}{4}x^4 - Cos\ x - x^2 + c$$

SEPARACION DE VARIABLES

Para resolver la ecuación diferencial de forma:

$$G_{(y)}\frac{dy}{dx} = F_{(x)}$$

- Separar sus variables para llevarla a la forma:

$$G_{(y)}dy = F_{(x)}dx$$

- Integrar ambos miembros:

$$\int G_{(y)}\, dy = \int F_{(x)}\, dx$$

Ejemplo:

Resolver: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 x}$

- $\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{sen^2 x}$
- **$Sec^2 y dy = Cosec^2 x\, dx$**
- **$\int Sec^2 y dy = \int Cosec^2 x\, dx$**
- **$Tg\ y = - Cotg\ x + C$**

Ejemplo: Para resolver $y^2\, dy - 3x^5 dx = 0$, separamos las variables $y^2\, dy = 3x^5 dx$

Integramos ambos miembros $\int y^2 dy = \int 3x^5 dx$ luego: $\frac{y^3}{3} = \frac{x^6}{2} + c$

Ejemplo: Para resolver: $3y^2\frac{dy}{dx} + 2x^3 = 0$, separamos variables $3y^2 dy + 2x^3 dx = 0$, e integramos: $3\int y^2 dy = -2\int x^3 dx$ Por lo tanto $\frac{3y^3}{3} = -\frac{2}{4}x^4 + c$

Ejemplo: Para resolver $y'\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0$, separamos variables $\frac{\sqrt{1-x^2}}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{dy} = 0$,

luego: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{dy|}$, e integramos: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

Ejemplo: Resolver $5Co\sec.y.\frac{dy}{dx} + 8.Sen^2.x = 0$ Separando variables e integrando

$5\int Co\sec.y.dy = -8\int Sen^2.x.dx$ Recurriendo a tablas obtenemos la solución

$5.\ln.(Co\sec.y. - .Cotg.y). = . - 8.(.\frac{x}{2} - \frac{Sen^2.2x}{4}.) + c$

Ejemplo: Resolver $Sec^2.y.\frac{dy}{dx} - 2.Co\sec.x.Cotg.x = 0$ Separando variables

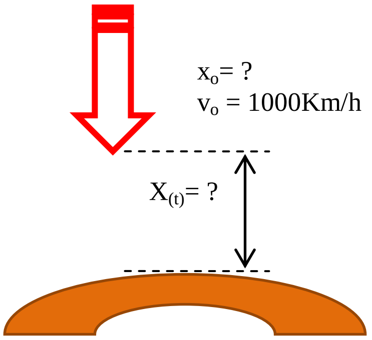
$\int Sec^2 y.dy = 2\int Co\sec.xCotg.x.dx$ de donde: $Tg.y = 2.Co\sec.x + c$

Ejemplo: Para resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, separo variables: $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$. integrando:

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$. → arc tg y = arc tg x + arc tg C → y = tg (arc tg x + arc tg C) = $\frac{x+C}{1-Cx}$

APLICACIÓN: DISTANCIA DE FRENADO

A qué altura debe activarse los retro propulsores capaz de producir una desaceleración de 20000 Km/hora por hora, para que una nave que cae libremente a una velocidad de 1000 Km/hora, alunice sin impactar sobre la superficie lunar?.



Los datos del problema:

- Aceleración de frenada: $\mathbf{a = 20000\ Km/hora^2}$
- Velocidad de la nave: $\mathbf{v_o = -\ 1000\ Km/hora}$
- Altura de la nave en el momento $\mathbf{t = 0}$, inicio del frenado $\mathbf{x_o = \ ?}$
- Altura de la nave respecto de la superficie de alunizaje: $\mathbf{x_{(t)} = \ ?}$

Por la segunda ley del movimiento de Newton:

1) De: $a = \dfrac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow \mathbf{v = \int a.dt}$; si $\mathbf{a}$ constante: $\mathbf{v = a.t + C_o}$

Condición inicial: Cuando $\mathbf{t = 0}$, velocidad: $\mathbf{v = v_o \rightarrow v_o = a.0 + C_o \rightarrow v_o = C_o \rightarrow \ v = a.t + v_o}$ **[1]**

2) De: $v = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow \mathbf{dx = v\ dt}$, integrando: $\mathbf{x_{(t)} = \int v.dt = \int (a.t + v_o)dt = \int a.t\ dt + \int v_o dt = \frac{1}{2} a.t^2 + v_o.t + C_1}$

Al alunizar: $\mathbf{t = 0}$ y $\mathbf{x = x_o}$, luego: $\mathbf{x_o = a.0^2 + v_o.0 + C_1 \rightarrow x_o = C_1}$.

La altura buscada será: $$\mathbf{x_{(t)} = \frac{1}{2} a.t^2 + v_o.t + x_o} \quad \textbf{[2]}$$

Reemplazando valores de los datos:

- **TIEMPO PARA ACTIVAR TRETROPROPULSORES**:

  De **[1]**: $\mathbf{v = a.t + v_o = \ 20000.t - 1000}$, para evitar impacto, la velocidad de la nave debe ser $\mathbf{v = 0}$.

  El alunizaje será luego de: $t = \dfrac{v + 1000}{20000} = \dfrac{1}{20}$ horas = **3 minutos**, de activar los retro propulsores.

- **ALTURA PARA ACTIVAR LOS RETROPROPULSORES**:

  Reemplazo $t = \dfrac{1}{20}$ horas, en **[2]**: $\mathbf{x_{(t)} \ = \frac{1}{2} a.t^2 + v_o.t + \ x_o \ = 10000.t^2 - 1000.t + \ x_o}$,

  $$\mathbf{x_{(t)} \ = 10000. \left(\frac{1}{20}\right)^2 - 1000. \frac{1}{20} + \ x_o}$$

  Para el alunizaje $\mathbf{x_{(t)} \ = 0}$, los retro propulsores deberán encenderse a una altura de

  $x_o = -\ 10000. \left(\dfrac{1}{20}\right)^2 + 1000. \dfrac{1}{20} \ =$ **25 Kilómetros**.

APLICACIÓN: CUERPO DE MASA VARIABLE

De la superficie terrestre se dispara hacia arriba, un cohete

- De masa estructural m_1,
- Contiene combustible de masa inicial m_2,
- Quemando combustible a índice constante a ($-\alpha = \frac{dm}{dt}$)
- De masa variable total del cohete **m**
- Expulsando productos de escape hacia atrás, a velocidad constante **b** en relación al cohete.

Despreciando fuerzas exteriores excepto la gravitacional **mg**, donde **g** (constante); encontrar la velocidad **v** y la altura **h** alcanzada al momento de agotarse el combustible.

Solucion:

En el instante inicial del disparo: **t = 0**, la velocidad es: $v = 0$ y masa total del cohete: $m = m_1 + m_2$

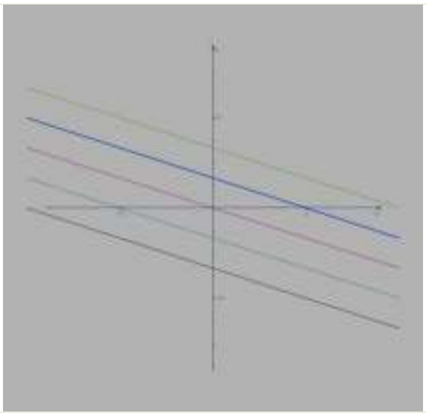
Si:

$\sum F$: Fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

w: Velocidad en relación a **m** de la partículas que se desprenden del cuerpo.

Por 2da ley de Newton: $F = \frac{d}{dt}(mv) = \sum F + (v+w)\frac{dm}{dt} = \sum F + v\frac{dm}{dt} + w\frac{dm}{dt}$

$m\frac{dv}{dt} = \sum F + w\frac{dm}{dt}$; como $\frac{dm}{dt} = -a$: Ecuación de variable independiente **t** y derivada de la forma $\frac{dm}{dt}$.



Separo variables: $G(m)\frac{dm}{dt} = F(t)$ → **G(m) dm = F(t) dt**

Integro: $\int G(m)\,dm = \int F(t)\,dt$

$dm = -a\,dt$ → $\int dm = \int -a\,dt$ → $m = -at + C_1$ **(1)**

Solución general: Haz de rectas de pendiente negativa $(-a)$, paralelas, desplazadas verticalmente, según la constante C_1.

Solución Particular: Solución de la ecuación, en único valor de C_1, que satisface la condición inicial:

En $t = 0, m = m_1 + m_2$ entonces: $m = -at + C_1$ **(1)**, luego:

$m_1 + m_2 = -a0 + C_1$. Por tanto: $C_1 = m_1 + m_2$, luego:

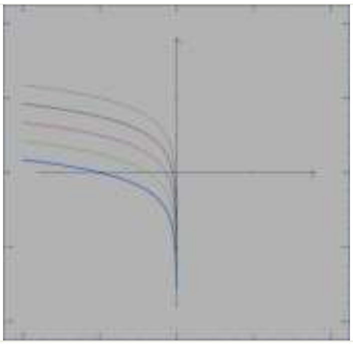
$m = m_1 + m_2 - at$ **(2)** **Solución particular es la recta cuya ordenada al origen:** $C_1 = m_1 + m_2$ **y pendiente** $(-a)$.

Como $w = -b$, $\sum F = -mg$ y $\frac{dm}{dt} = -a$. Por Newton para masa variable: $m\frac{dv}{dt} = \sum F + w\frac{dm}{dt}$

Entonces: $m\frac{dv}{dt} = -mg - b(-a)$, o sea: $m\frac{dv}{dt} = -mg + ab$ **(3)**

Reemplazo **(2)** en **(3)**: $(m_1 + m_2 - at)\frac{dv}{dt} = -(m_1 + m_2 - at)g + ab$ **(3)**

Despejo $\frac{dv}{dt}$ dividiendo ambos miembros en $(m_1 + m_2 - at)$:



$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{ab}{(m_1+m_2-at)}$ Ecuación diferencial ordinaria: Tiene una variable independiente (t) y derivadas ordinarias respecto a ella de la forma $\frac{dv}{dt}$.

Separo Variables: $dv = [-g + ab/((m_1 + m_2 - at))]dt$

Integro: $\int dv = \int[-g + ab/((m_1 + m_2 - at))]dt$

$$v = -gt - \frac{ab}{a}\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2 = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2 \quad (4)$$

$v = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2$ **Solución general**

Solución Particular: **Condiciones iniciales:** en $t = 0, v = 0$

$0 = 0 - b\ln|m_1 + m_2| + C_2$ Por tanto: $C_2 = b\ln|m_1 + m_2|$

Luego: $v = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + b\ln|m_1 + m_2|$ **(5)** **Solución particular**

Como $m = m_1 + m_2 - at$ **(2)**, y como el tiempo de apagado se produce cuando $m = m_1$, ya que no hay combustible, es decir: b$m_1 = m_1 + m_2 - at$

Por tanto: bb$at = m_2$ entonces $t = \frac{m_2}{a}$ **(6)**, entonces $v = velocidad\ de\ apagado$

Por propiedades de la diferencia de logaritmo acomodamos la expresión **(5)** y obtenemos:

$v = -gt + b\ln\left|\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2-at}\right|$ (7), luego sustituyendo **(6)** en **(7)**: $v = -\frac{gm_2}{a} + b\ln\left|\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2-a\frac{m_2}{a}}\right|$

Finalmente: $v = -\frac{m_2 g}{a} + b\ln\left|\frac{m_1+m_2}{m_1}\right|$ es la velocidad al momento de agotarse el combustible.

APLICACIÓN: CUERPO DE MASA VARIABLE: COHETE SATURNO V

Saturno V, pisó la superficie lunar el 20 de Julio de 1969.

Datos:

- Masa total al momento del lanzamiento: **m = 2.903 t**
- Masa del carburante o combustible: **m_2 = 2.000 t**
- Masa estructural: **$m_1 = m - m_2$ → m_1 = 903 t**
- Ritmo de pérdida de masa por segundo del cohete: **$a = \frac{1}{60}$ m = 2.093.000 kg/60 s = 34.883 kg/s**
- Velocidad de escape de gases de la nave (constante): **b = 3.000 m/s**

La Velocidad al acabarse el combustible:

$$v = -\frac{m_2 g}{a} + b\ln\left|\frac{m_1+m_2}{m_1}\right| \rightarrow v = -\frac{\left(2.000.000\frac{m}{s}9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)}{34.883\frac{kg}{s}} + 3000\,\frac{m}{s}\ln\left|\frac{2.903.000\,kg}{903.000kg}\right|$$

$v = 2.941\ \frac{m}{s}$ = 10.587 Km/h

APLICACIÓN: MEZCLAS QUIMICAS

En un tanque lleno de **40** lt de salmuera, contiene **2,5** kg de sal disueltos, se introducen **8** lt por minuto de salmuera que contiene 0,4 kg de sal por litro y la mezcla, bien agitada, sale del tanque con el mismo gasto.

a) Determínar la cantidad de sal contenida en el tanque en cualquier instante.
b) ¿Cuánta sal contiene al cabo de 10 min?
c) ¿Cuánta sal contendrá después de un intervalo de tiempo muy largo?

Solución: Sea:

- Kilogramos de sal que se hallan en el tanque al transcurrir **t** min: **A**
- Razón de variación en relación al tiempo **t** de la cantidad **A** de sal: **dA/dt**.

dA/dt = proporción de la cantidad ganada – proporción de la cantidad perdida **(1)**

- Cantidad de sal entrada por minuto: Si entran **8 lt/min** que contienen **0.4 kg de sal por litro**,

$$8\frac{lt}{\min} * 0.4\frac{kg}{lt} = 3{,}2\frac{kg}{\min}$$ Que es la proporción en que se aumenta la cantidad de sal. **(2)**

- Cantidad de sal salida por minuto: El tanque siempre contiene **40 litros** y como **A kg** de sal en cualquier instante **t**, la concentración de sal en el instante **t** es de **A kilogramos por 40 litroS**.

$$\frac{Akg}{40lt} * \frac{8lt}{\min} = \frac{Akg}{5\min}$$ **(3)**

- Variación de la cantidad de sal por minuto **(1)**, **(2)** y **(3)**: $\frac{dA}{dt} = 3{,}2 - \frac{A}{5}$

Multiplico por 5: $5\frac{dA}{dt}$ = 16 - A , separo variables e integro: $\int \frac{dA}{16-A} = \int \frac{dt}{5}$ → **-ln(16-A)=** $\frac{t}{5}$**+C** **(4)**

Para A=2,5 cuando t = 0: **- ln(16-2.5)= C → C = - ln 13.5**, reemplazo en **(4)**: **-ln(16-A)=** $\frac{t}{5}$**- ln 13.5**

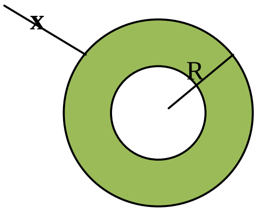
Separo variables y multiplico por -1: **+ln(16-A) - ln 13.5= -** $\frac{t}{5}$ → $\ln\frac{(16-A)}{13{,}5} = -\frac{t}{5}$ → $A = 16 - 13{,}5e^{-t/5}$ **(5)**

Cantidad de sal del tanque en instante **t** = 10 min: en **(5)** : **A= 16 – 13.5**e^{-2} **= 14.2 kg de sal**

Cuando **t →** ∞, será **A = 16 kg**, valor que podría obtenerse a partir de la ecuación diferencial haciendo **dA/dt = 0**, puesto que A será constante al alcanzarse condiciones de equilibrio.

APLICACIÓN: ESCAPE DE LA FUERZA GRAVITACIONAL

¿Con qué velocidad inicial v_0 debe lanzarse un objeto de masa m desde la Tierra (R=6371Km; 9,8m/s^2) para que no regrese atraído por la fuerza gravitacional?



Solución:

$F = -\dfrac{mgR^2}{(R+x)^2}$ y como: $F = ma = m\dfrac{dv}{dt} \equiv m\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dv}{dx}$ ecuación de variables separables: $F = mv\dfrac{dv}{dx}$

$$vdv = \frac{-gR^2}{(R+x)^2}dx \rightarrow \int vdv = \int \frac{-gR^2}{(R+x)^2}dx \rightarrow v^2 = \frac{2gR^2}{R+x} + c$$

Como x (0) = 0: $v_0{}^2 = 2gR + c$ $\quad c = v_0{}^2 - 2gR$

Luego la solución particular con $v = v_{(o)}$ para $x = 0$ es: $v^2 = \dfrac{2gR^2}{R+x} + v_0{}^2 - 2gR$

Reemplazo: $v^2 = \dfrac{2(9,8)(40589641)}{6371+0} + 0 - 2(9,8)(6371) = \dfrac{795556963,6}{6371} - 124871,6$

$v^2 = 124871,6 - 124871,6$ **= 0** → $v = 0$

velocidad inicial del cuerpo con masa m para que cuando al lanzarlo no regrese a la tierra.

APLICACIÓN: CRECIMIENTO POBLACIONAL

Determinar para dentro de **t** =**30** años, el tamaño de una población que actualmente tiene $\mathbf{P_{(0)}=500}$ habitantes y que crece en una década(**t** =**10** años), a razón de **15** %.

Solución:

Variación de población $\mathbf{P_{(t)}}$ en el tiempo **t**: $\quad$ d**P**/dt = **k** .$\mathbf{P_{(t)}}$, Donde **k**: Constante (Si k>0 **P** crece; Si k<0 **P** decrece)

Variación de población $\mathbf{P_{(1\ año)}}$: $\quad$ **P = $\mathbf{P_{(0)}}$+0.15 $\mathbf{P_{(0)}}$ =500+0,15 . 500= 575**

Variación de población $\mathbf{P_{(t\ años)}}$:

d**P**/dt = **k** .$\mathbf{P_{(t)}}$ → d**P**/ $\mathbf{P_{(t)}}$ = **k** dt → ∫(d**P**/ $\mathbf{P_{(t)}}$) = **k** ∫ dt→ln **P**=**k(t+c)** → **P**= **e**$^{(k.t+A)}$ → **P=e**$^{(k.t)}$ **B**

Para: $\mathbf{P_{(0)}}$**=500** → 500 = **e**$^{(k.0)}$ B → B = 500 → P = 500 **e**$^{(k.t)}$

$\mathbf{P_{(10)}}$ **= 575** → 575= 500 **e**$^{(k.10)}$ → **e**$^{(k.t)}$ = 575/500 → k= 0,014→ **P= 500 e**$^{(0,014.t)}$

Variación de población $\mathbf{P_{(30\ años)}}$: $\quad$ **P** = 500 **e**$^{(0,014\ .\ 30)}$ = **761** habitantes

APLICACIÓN: INTERES COMPUESTO

Al prestar dinero, luego un tiempo se devuelve una cantidad mayor, por el interés (Indice que mide la rentabilidad de los ahorros) o costo del crédito prestado, que compensa por la dilación de su consumo, la inconveniencia de no hacer uso del dinero durante un tiempo, por el riesgo asociado a que el préstamo no sea devuelto o que la cantidad devuelta tenga menor capacidad de compra por la inflación.

- **INTERÉS SIMPLE** Interés producido durante el tiempo que dura una inversión, está en función únicamente del capital principal, la tasa de interés y el número de períodos.
  La fórmula es: $I_s = C_I.i.t$ → $C_I = I/(i.t)$ → $i = I_s / (i.t)$ → $t = I_s / (C_I.i)$ Donde:
  - I_s: Interés Simple
  - C_I: Capital Inicial
  - i: Tasa de interés en tanto por uno, (multiplicada por 100, queda expresada en %).
  - t: Tiempo expresado en años.

- **INTERÉS COMPUESTO:** Costo del dinero, beneficio o utilidad de un capital Inicial (P_V) o principal a tasa de interés (i) durante un período (t). Los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial.
  - **Primer período**: Valor final V_F = Valor inicial (V) más interés: $A = P(1+i)^n$

    Reemplazo A por V_F y P por V, para un 1er período se obtiene, dado que V_F es el valor final; V es el valor inicial; i interés del período y n el número de períodos: $V_F = V(1+i)$
  - **Segundo período:** $V_F = V(1+i)\cdot(1+i)$ → $V_F = V\cdot(1+i)^2$
  - **Tercer período:** $V_F = V\cdot(1+i)^2\cdot(1+i)$ → $V_F = V\cdot(1+i)^3$
  - **Generalizando**: $V_F = V(1+i)^n$ Donde: V_F Valor final; V : Valor inicial; i interés del período y n : Nro de períodos

  Ejemplo: Con un capital de $1000 a una tasa del 11%

El valor final en:	La sucesión: $a_n = 1000\ (1 + 0{,}11)^n$
	a_1=1110
1 año, sería de 1110	a_2=1232,1
2 años, sería de 1232,1	a_3=1367,63
3 años, sería de 1367,6	a_4=1518,07
	a_5=1685,05
	a_6=1870,41
	a_7=2076,16
	a_8=2304,53

Límite de la sucesión: $\lim_{x\to\infty}\left[100(1+0{,}1)^x\right] = \infty$: La sucesión, no converge, por lo tanto es divergente

Sucesion creciente o decreciente: Reemplazando n por $n+1$ → $a_{n+1} = 100\ (1 + 0{,}1)^{n+1}$
Verificando $a_n \le a_{n+1}$ → $100\ (1 + 0{,}1)^n \le 100\ (1 + 0{,}1)^{n+1}$, se cumple esta condición, la sucesión es creciente.
A tasa de interes r, la relación es la cantidad de dinero S, respecto del tiempo: $dS/dt = r.S_{(t)}$

Ejemplo: Determinar el interés anual r que duplica en 7 años, un depósito de S_o pesos.

$$dS/dt = r.S \rightarrow dS/S = r.dt \rightarrow \int dS/S = r\int dt \rightarrow Ln(S)= r.(t+c) \rightarrow S=B.e^{r.t} \rightarrow S_{(o)}=B.e^{r.0} \rightarrow B = S_{(o)}$$

Para $t=7$ años:
$2S_{(o)}= S_{(o)}.e^{r.t} \rightarrow 2= e^{7r} \rightarrow Ln(2) = 7r \rightarrow 0.693=7r \rightarrow r = 0.10=$ **10%** interés que duplica el capital en 7 años

SUSTITUCION

Cuando no es posible separar las variables de una ecuación diferencial, se puede:	Ejemplo: Resolver la ecuación: $\frac{dy}{dx}$ = **(x - y)** ^{2} **[1]**
❑ **Reemplazar dos o más variables reales por otra variable ficticia.**	Desarrollo el binomio: $dy = (x^2 - 2xy + y^2).dx \rightarrow dy = x^2dx - 2xydx + y^2dx$ Como: **2xydx**, no permite separar las variables **(x, y)**: Uso la variable ficticia: **u = x - y** **[2]**
❑ **Separar, respecto a la variable ficticia, sus variables para llevarla a la forma:** $G_{(y)}dy = F_{(x)}dx$	• Derivo **[2]** respecto de **x**: $\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$ **u' = 1 - y'** → **y' = 1 - u'** **[3]** • Reemplazo **[3]**, **[2]** en **[1]** : **1 - u' = u** ^{2} → - u' = u ^{2} - 1 → u' = 1 - u ^{2} $\frac{du}{dx}$ = 1 - u ^{2},
❑ **Integrar ambos miembros:** $\int G_{(y)}\,dy = \int F_{(x)}\,dx$	• Integro: $\int \frac{du}{1-u^2} = \int dx \rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} + c$ **[4]**
❑ **Reemplazar la variable ficticia por sus valores reales**	• Reemplazo **[2]** **u = x – y** en **[4]**: $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x-y}{1-x+y} + c$

Ejemplo: Para resolver la ecuación $\frac{dy}{dx}$ = **(x - y)** ^{2} **[1]**

Desarrollo el binomio: $dy = (x^2 - 2xy + y^2).dx$, → **dy = x** ^{2} **dx – 2xy dx+ y** ^{2} **dx**, pero **2 x y dx,** no permite separar las variables **(x, y)**, por ello:

- Uso la variable ficticia: **u = x - y** **[2]**, que
- Derivando **[2]** respecto de **x**: $\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$ → **u' = 1 - y'** → **y' = 1 - u'** **[3]**
- Reemplazo **[3]**, **[2]** en **[1]** : **1 - u' = u** ^{2} → - u' = u ^{2} - 1 → u' = 1 - u ^{2} → $\frac{du}{dx}$ = 1 - u ^{2},
- Separo variables e integro: $\int \frac{du}{1-u^2} = \int dx \rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} + c$ **[4]**
- Reemplazo **[2]** **u = x – y** en **[4]**: $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x-y}{1-x+y} + c$

Ejemplo: Para resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ resulta: $y = \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}$ [1]

Sustituir: $u = x^2 + 1$; [2] luego: du = 2x dx, [3] de donde: x.dx = $\frac{du}{2}$ [3]

Reemplazar en [1],[2] y [3] : $y = \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = u^{1/2} + C$ [4]

Reemplazar en [2] en [4]: $y = \sqrt{x^2+1} + C$

Ejemplo: Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \cos(x^3)$ resulta: $y = \int x^2 \cdot \cos(x^3) \cdot dx$

Sustituir: $u = x^3$; luego: $du = 3x^2 \cdot dx$, de donde: $x^2 \cdot dx = \frac{du}{3}$

Luego: $\int x^2 \cdot \cos(x^3) \cdot dx = \frac{1}{3}\int \cos(u) \cdot du = \frac{1}{3} \cdot sen(u) + C = \frac{1}{3} \cdot sen(x^3) + C$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

1. **Tiene la forma de:** $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}dy = 0$ [1]
2. **Cumple la condición de:** $\partial P_{(x,y)}/\partial y = \partial Q_{(x,y)}/\partial x$ [2]

Se resuelve con la fórmula: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y$

Para resolver estas ecuaciones	Ejemplo:
verificar si tiene la forma de: $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}dy = 0$ [I]	$3x\,dx + 4y\,dy = 0$ [II
Por comparación de [I] con [II] : ❑ Deducir: • $P_{(x,y)} = ?$ [III] • $Q_{(x,y)} = ?$ [IV] ❑ Verificar si: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Resultan: [III] $P_{(x,y)} = U_x = 3x$ [IV] $Q_{(x,y)} = U_y = 4y$ Como: $\frac{dP}{dy} = 0$ y $\frac{dQ}{dx} = 0$, luego, la **ecuación es exacta**
Resolver mediante la fórmula: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y$	Reemplazo: $P_{(x,y)} = 3x$ y $Q_{(x,y)} = 4y$ $U = \int 3x.dx + \int (4y - \frac{\partial}{\partial y}(\int 3.x.dx))\partial.y$ $U = 3\int x.dx + 4\int y dy - \int \frac{\partial}{\partial y}(3\frac{X^2}{2})\partial.y$ $U = \frac{3x^2}{2} + \frac{4}{2}y^2 - 0 + C = \frac{3x^2}{2} + 2y^2 + c$

DETERMINACION DE LA FORMULA:

- ❑ Si [1]: $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}dy = 0$ tiene por solución a: $U(x,y)$, su diferencial es: $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$ [3]
- ❑ Comparo [1] con [3]: $P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ [4] y $Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ [5]
- ❑ Integro [3]: $\int dU = \int \frac{\partial U}{\partial x}dx + \int \frac{\partial U}{\partial y}dy = U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}dx + \int \frac{\partial U}{\partial y}dy, = \int \frac{\partial U}{\partial x}dx + f(y)$ [6]
- ❑ Derivo [6] respecto de y: $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{d}{dy}f(y)$ [7]
- ❑ Comparo [5] y [7]: $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{d}{dy}f(y)$, luego: $\frac{d}{dy}f(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}dx$ [8]
- ❑ Integro [8]: $\int \frac{d}{dy}f(y) = \int [Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}dx]$, → $f(y) = \int [Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}dx]dy$ [9]
- ❑ Reemplazo f(y) de [9] en [6]: $U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}dx + \int [Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}dx]dy$ [10]
- ❑ Reemplazo [4] $P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ en [10] → $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y$

DETERMINACION DE LA CONDICIÓN: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

- Reemplazo **[4]** P(x,y) = $\frac{\partial U}{\partial x}$, en **[8]**: $\frac{d}{dy}$ f(y) =Q(x,y) - $\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial U}{\partial x}$ dx → $F'y = Q - \frac{\partial}{\partial y}(\int Pdx)$ Expresión que tiene sentido solo si **F'y** es solo función de **y**

- Para ello es necesario que la derivada de **F'y** respecto de **x** sea cero, o sea que: $\frac{\partial.F'y}{\partial.x} = \frac{\partial.Q}{\partial.x} - \frac{\partial.\partial}{\partial.y.\partial.x}(\int P.dx) = 0$, → $\frac{\partial.Q}{\partial.x} - \frac{\partial.P}{\partial.y} = 0$, luego: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ cqqd.

Para resolver estas ecuaciones	Ejemplo:
Llevar la eduación dada al formato: **$P_{(x,y)}$ dx + $Q_{(x,y)}$dy = 0** **[I]**	Resolver: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}$ $3x^2y^2$ dy = - $2xy^3$ dx → **$3x^2y^2$ dy + $2xy^3$ dx = 0** **[II]**

Comparando: **[I]** con **[II]** :
- Deducir:
  - **$P_{(x,y)}$** = ? **[III]**
  - **$Q_{(x,y)}$**= ? **[IV]**
- Verificar si la ecuación dada cumple la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
	Resultan:
	- **$P_{(x,y)}$ = U_x = $2xy^3$** **[III]**
	- **$Q_{(x,y)}$ = U_y = $3x^2y^2$** **[IV]**
	
	Como: $\frac{dP}{dy}$ = **$6xy^2$** y $\frac{dQ}{dx}$ = **$6xy^2$**, la ecuación es exacta.

Reemplazar: **[III]** y **[IV]** de **$P_{(x,y)}$** y **$Q_{(x,y)}$** en la fórmula: **$U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\, Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\, \partial y$**	Reemplazo: **$P_{(x,y)} = 2xy^3$** y **$Q_{(x,y)} = 3x^2y^2$** $U = \int 2xy^3dx + \int [3x^2y^2 - \frac{\partial}{\partial y}(\int 2xy^3dx)]dy$ $U = x^2y^3 + \int [3x^2y^2 - 3x^2y^2]dy$ **$U = x^2 y^3 + c$**
Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:	
En **[III]**: **$P_{(x,y)}$ = U_x =$2xy^3$**, integro:	$\int 2xy^3$ dx U= x^2y^3 + **$g_{(y)}$** = **[V]**
Derivo **[V]** respecto de: **y**	$U_y = 3x^2y^2$ + **$g'_{(y)}$** **[VI]**
Igualo **[IV]** y **[VI]**	$3x^2y^2 = 3x^2y^2$ + **$g'_{(y)}$** → **$g'_{(y)}$** = 0
Integro: $\int$**$g'_{(y)}$**	**$g_{(y)}$** = $\int$**$g'_{(y)}$** = $\int 0$ dy = 0 + c **[VII]**
Reemplazo: **[VII]** en **[V]**	**$U = x^2 y^3 + c$**

Para resolver estas ecuaciones	Ejemplo:
Llevar la eduación dada al formato: **$P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}dy = 0$** [I]	Resolver: $(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3ysen3x).\frac{dx}{dy} + (2y - \frac{1}{x} - \cos 3x)$ **= 0** Multiplico por dy: $(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3ysen3x).dx + (2y - \frac{1}{x} - \cos 3x)dy = 0$ [II]
Comparando: [I] con [II] : ❑ Deducir: • $P_{(x,y)}$ = ? [III] • $Q_{(x,y)}$ = ? [IV] ❑ Verificar si la ecuación dada cumple la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Resultan: $P_{(x,y)} = U_x = (\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3ysen3x)$ [III] $Q_{(x,y)} = U_y = (2y - \frac{1}{x} - \cos 3x)$ [IV] Como: $\frac{dP}{dy} = (\frac{1}{x^2} + 3sen3x)$ y $\frac{dQ}{dx} = (\frac{1}{x^2} + 3sen3x)$, la ecuación es exacta.
Reemplazar: [III] y [IV] de $P_{(x,y)}$ y $Q_{(x,y)}$ en la fórmula: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\, Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y} (\int P_{(x,y)}dx)\,]\, \partial y$	$U = \int (\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y.sen3x)dx + \int [(2y - \frac{1}{x} - \cos 3x) - \frac{\partial}{\partial y}(\int (\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y.sen3x)dx]dy$ $U = -\frac{y}{x} - x^4 - y.\cos 3x + \int (2y - \frac{1}{x} - \cos 3x + \frac{1}{x} + \cos 3x)dy$ $U = -\frac{y}{x} - x^4 - y.\cos 3x + y^2 + c$

Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:

- Integro [3]: $U = \int (\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3ysen3x) = (\frac{y}{x} - x^4 + yCos.x) + g(y)$
- Derivo respecto de y: $U_y = -\frac{1}{x}$ - Cos 3x + g'(y) [4]
- Igualo [4] y [2]: $(2y - \frac{1}{x} - \cos 3x) = -\frac{1}{x}$ - Cos 3y + **g'(y)** → **g'(y)** = 2y
- Integro **g'(y)** : ∫2y dy = $\mathbf{y^3}$ **+ c** **[5]**
- Reemplazo [5] y [3]: **U** = $-\frac{y}{x} - x^4 - y.\cos 3x + y^2 + c$

Ejemplo: **Resolver: $(3y^2 + 10xy^2)dx + (6xy - 2 + 10x^2y)dy = 0$**

Comparo con: $P(x,y)dx+Q(x,y)\,dy = 0$ → $\mathbf{P(x,y)} = U_x = 3y^2 + 10\,xy^2$ [I]; $\mathbf{Q(x,y)} = U_y = 6xy - 2 + 10x^2y$ [II]

Como: $\frac{dP}{dy} = 6y + 20xy$ y también $\frac{dQ}{dx} = 6y + 20xy$: Aplico: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\,Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\partial y$

$U = \int (3y^2 + 10xy^2)dx + \int [(6xy - 2 + 10x^2y) - (\frac{d}{dy})(\int (3y^2 + 10xy^2)dx]\,dy$

$U = 3y^2x + 10\frac{x^2}{2}y^2 + \int \left[(6xy - 2 + 10x^2y) - \frac{d}{dy}(3y^2x + 10x^2y)\right]dy$

$U = 3y^2x + 5x^2y^2 + \int [6xy - 2 + 10x^2y - 6xy - 10x^2y]\,dy$

$U = 3y^2x + 5x^2y^2 - \int 2\,dy$ → $U = 3y^2x + 5x^2y^2 - 2y + C$

Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:

De [I] $U_x = 3y^2 + 10\,xy^2$ integro: $\int dU = \int(3y^2 + 10\,xy^2)dx$ $U = 3y^2x + 5x^2y^2 + g(y)$ [III]

Derivando [III] respecto de y: $U_y = 6yx + 10x^2y + g'(y)$ [IV]

Igualo: [IV] = [II] $6yx + 10x^2y + g'(y) = 6xy - 2 + 10x^2y$ resulta: $g'(y) = -2$; o sea $\frac{dg(y)}{dy} = -2$

Integro: $\int g(y) = -2\int dy$ de donde $g(y) = -2y + C$ [V] Reemplazo [V] en [III]: $U = 3y^2x + 5x^2y^2 - 2y + C$

Ejemplo: **Resolver $(2x - 3y)\,dx + (2y - 3x)\,dy = 0$** Comparando con: $P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Resultan: $P(x,y) = U_x = 2x - 3y$ [I] $Q(x,y) = U_y = 2y - 3x$ [II]

Como: $\frac{dP}{dy} = -3$ y también $\frac{dQ}{dx} = -3$: Aplico: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\,Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\,\partial y$

$U = \int (2x - 3y)dx + \int [(2y - 3x) - (\frac{d}{dy})(\int [(2x - 3y)]dx]\,dy$

$U = x^2 - 3xy + \int \left[(2y - 3x) - \frac{d}{dy}(x^2 - 3xy)\right]dy$

$U = x^2 - 3xy + \int [(2y - 3x) + 3x]\,dy$ → $U = x^2 - 3xy + \int [(2y)]\,dy$ → $U = x^2 - 3xy + y^2 + C$

Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:

- Como de **[I]** $U_x = 2x - 3y$, integrando: $\int dU = \int(2x-3y)dx$ $U = -3yx + g(y)$ **[III]**
- Derivo **[III]** respecto de y: $U_y = -3x + g'(y)$ **[IV]**
- Igualo **[IV]** = **[II]**: $-3x + g'(y) = 2y - 3x$ resulta: $g'(y) = 2y$; o sea $\frac{dg(y)}{dy} = 2y$ Integrando $\int g(y) = 2\int y.dy$, luego: $g(y) = y^2 + C$, **[V]** Reemplazo **[V]** en **[III]**: $U = -3yx + y^2 + C$

Ejemplo: **Resolver: $ye^x\,dx + e^x\,dy = 0$**

Comparo con: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ → $\mathbf{P(x,y)} = U_x = ye^x$; $\mathbf{Q\,(x,y)} = U_y = e^x$

Comoo: $\frac{dP}{dy} = e^x$, también $\frac{dQ}{dx} = e^x$, aplico: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\,Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\,\partial y$

$U = \int [(y\,e^x)]dx + \int [e^x - (\frac{d}{dy})(\int [(y\,e^x)]dx]\,dy$

$U = y\,e^x + \int \left[e^x - \frac{d}{dy}(y\,e^x)\right]dy$ → $U = y\,e^x + \int [e^x - e^x]\,dy$ → $U = y\,e^x + C$

Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:

Como $U_x = y\,e^x$ integro esta expresión: $\int dU = \int y.e^x.dx$ $U = ye^x + g(y)$ (1)

Derivo respecto de "y": $U_y = e^x + g'(y) = e^x$ → $g'(y) = 0$ → $\frac{dg(y)}{dy} = 0$

Integro $\int g(y). = .0.\int .dy$, → $g(y) = 0 = C$, reemplazo en (1): $U = ye^x + C$

Ejemplo: **Resolver:** **$2xy\,dx + (x^2 + \cos y)\,dy = 0$**

Comparo con: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ → **P(x,y)**$=U_x=2xy$; **Q(x,y)** $= U_y = (x^2 + \cos y)$

Como: $\frac{dP}{dy} = 2x$ y también $\frac{dQ}{dx} = 2x$, aplico: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\, Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\, \partial y$

$U=\int [(2xy)]dx + \int [(x^2 + \cos y) - (\frac{d}{dy})(\int (2xy)dx)]\, dy$

$U=x^2 y + \int [(x^2 + \cos y) - \frac{d}{dy}(x^2 y)]\, dy$ → $U=x^2 y + \int [(x^2 + \cos y) - x^2]\, dy$

$U=x^2 y + \int [(\cos y)]\, dy$ → $U=x^2 y + \sin y + C$

Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:

- Como $U_x = 2xy$ integrando: $\int dU = \int 2x.y..dx$ $U = x^2y + g(y)$ (1)
- Derivando respecto de "y": $U_y = x^2 + g'(y) = x^2 + \cos.y$ de donde $g'(y) = \frac{dg(y)}{dy} = \cos y$
- Integro $\int g(y). = \int Cos.y.dy$ → $g(y) = \text{Sen } y + C$; Reemplazo en (1) $U = x^2y + \text{Sen } y + C$

Ejemplo: **Resolver: $(x^2 + y^2)dy + 2xy\,dx = 0$**

Como: $Q = (x^2 + y^2)$; $P = 2xy$ Derivando: $Q_y = 2x$; $P_x = 2x$ Cumple $Q_y = P_x$

$U=\int P_{(x,y)}dx+\int [Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y = \int 2xydx+\int [(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\int 2xydx)].dy$

$U = yx^2 + \int [x^2 + y^2 - \frac{\partial}{\partial y}(yx^2)]dy$ $U = y\,x^2 + (1/3)y^3 + c$

Otro modo de resolver ésta ecuación es usar los pasos para obtener la fórmula general:

- Como $U_x = 2xy$ integro: $\int dU = \int 2x.y..dx$ $U = x^2y + g(y)$ (3); Derivo respecto de "y": $U_y = x^2 + g'(y)$ (4)
- Igualo (4) y (2) $(x^2 + y^2) = x^2 + g'(y)$, resulta $g'(y) = y^2$
- Integro $\int g(y) = \int y2\,dy = \frac{y^3}{3} + C$ (5) Reemplazo (5) y (3) $U = y\,x^2 + (1/3)y^3 + c$

FACTOR DE INTEGRACION

1. La ecuación diferencial de forma: $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$ [1]
   que NO cumple la condición: $\partial P_{(x,y)}/\partial y = \partial Q_{(x,y)}/\partial x$ [2]
2. Puede transformarse en exacta mediante un **FACTOR de INTEGRACION**:
   - **Opción 1:** $e^{\int F(x)dx}$ donde → $F_x = \frac{1}{Q}\left(\partial P_{(x,y)}/\partial y - \partial Q_{(x,y)}/\partial x \right)$ [3]
   - **Opción 2:** $e^{\int F(y)dy}$ donde → $F_y = \frac{1}{P}\left(\partial P_{(x,y)}/\partial y - \partial Q_{(x,y)}/\partial x \right)$ [4]
3. Multiplicar la ecuación [1] por el factor de integración [3] o [4], luego verificar la condición [2]
   Si se cumple la condición [2], resuelver con: $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y$

Para aplicar el proceso de Factor de Integración	Ejemplo
Llevar a forma: $P_{(x,y)}dx+Q_{(x,y)}dy=0$ [a]	$2y\,dx + x\,dy = 0$ [b]
Comparando: [a] con [b] ❑ Deducir: • $P_{(x,y)} = ?$ [I] $Q_{(x,y)} = ?$ [II] ❑ Verificar si: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Resultan: $P_{(x,y)} = U_x = 2y$ [I] $Q_{(x,y)} = U_y = x$ [II] Como: $\frac{dP}{dy} = 2$ y $\frac{dQ}{dx} = 1$ → **la ecuación no es exacta**
Determino FACTOR de INTEGRACION: Primera opción: $e^{\int F(x)dx}$ donde: $F_x = \frac{1}{Q}(\partial P_{(x,y)}/\partial y - \partial Q_{(x,y)}/\partial x)$	**Función factor de integración**: $Fx = \frac{1}{Q}(\frac{\partial.P}{\partial.y} - \frac{\partial.Q}{\partial.x}) = \frac{1}{x}.(2-1) = \frac{1}{x}$ **Factor de integración**: $e^{\int F(x)d.x} = e^{\int \frac{1}{x}d.x} = e^{\log.x} = x$
Multiplicando por el factor de integración, obtengo la nueva ecuación	Multiplico $2y\,dx + x\,dy = 0$ por el factor **x**: $2xydx + x^2dy = 0$ [c]
Comparando: [a] con [c] $P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy = 0$ [a] ❑ Deducir: • $P_{(x,y)} = ?$ [I] $Q_{(x,y)} = ?$ [II] Verificar si: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Resultan: $P_{(x,y)} = U_x = 2xy$ [I] $Q_{(x,y)} = U_y = x^2$ [II] Como: $\frac{dP}{dy} = 2x$ y $\frac{dQ}{dx} = 2x$ → **la ecuación es exacta**
Resolver con: $P_{(x,y)} = \dots$ y $Q_{(x,y)} = \dots$ **en:** $U=\int P_{(x,y)}dx+\int[Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y$	Reemplazo: $P_{(x,y)} = 2xy$ y $Q_{(x,y)} = x^2$ $U_x = x^2 y + \int[(x^2) - x^2]\,dy = x^2 y + C$

Otro método	
Integro: [I]	$U_x = 2xy$, → $\int dU = \int (2xy)dx$ → $U_x = x^2 y + g_{(y)}$ [III]
Derivo [III] respecto de y:	$U_x = x^2 + g'_{(y)}$ [IV]
Igualo [IV] = [II]:	$x^2 + g'_{(y)} = x^2$, por tanto: $g'_{(y)} = \frac{dg(y)}{dy} = 0$ → $g_{(y)} = 0dy$
Integro:	$\int g_{(y)} = \int 0.dy$, → $g_{(y)} = 0 + C$ [V]
Reemplazo [V] en [III]:	$U_x = x^2 y + C$

Para aplicar el proceso de Factor de Integración	Ejemplo
Llevar a forma: **$P_{(x,y)}dx+Q_{(x,y)}dy=0$** [a]	$(y + \ln(x^n)/n)dx = x\,dy$ → $(y + \ln x)dx = x\,dy$ → $(y+\ln x)dx - xdy = 0$ [b]
Comparando: [a] con [b] ❑ Deducir: • $P_{(x,y)} = ?$ [I] $Q_{(x,y)} = ?$ [II] ❑ Verificar si: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Resultan: $P_{(x,y)} = U_x = y+\ln x$ [I] $Q_{(x,y)} = U_y = x$ [II] Como: $\frac{dP}{dy} = 1$ y $\frac{dQ}{dx} = -1$ → **la ecuación no es exacta**
Determino FACTOR de INTEGRACION: Primera opción: $e^{\int F(x)dx}$ donde: $F_x = \frac{1}{Q}(\partial P_{(x,y)}/\partial y - \partial Q_{(x,y)}/\partial x)$	**Función factor de integración**: $F(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1+1}{-x} = -\frac{2}{x}$ **Factor de integración**: $e^{\int -(2/x)dx} = e^{-2.\ln x} = \frac{1}{x^2}$
Multiplicando por el factor de integración, obtengo la nueva ecuación	$\frac{(y+\ln x)}{x^2}dx - \frac{x}{x^2}dy = 0$ [c]
Comparando: [a] con [c] **$P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy = 0$** [a] ❑ Deducir: • $P_{(x,y)} = ?$ [I] $Q_{(x,y)} = ?$ [II] Verificar si: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Resultan: $P = \frac{(y+\ln x)}{x^2}$ [I] $Q = \frac{1}{x}$ [II] Como: $\frac{dP}{dy} = (1/x^2)$ y $\frac{dQ}{dx} = (1/x^2)$ → **la ecuación es exacta**
Resolver con: $P_{(x,y)} = \ldots$ y $Q_{(x,y)} = \ldots$ **en:** $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)]\partial y$	Reemplazo: [I] y [II]: $U = \int \frac{y+\ln x}{x^2}.dx + \int [(\frac{-1}{x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\int (\frac{y+\ln x}{x^2})dx)]dy$ $U = \int \frac{y+\ln x}{x^2}.dx + \int [(\frac{-1}{x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\int (\frac{y+\ln x}{x^2})dx)]dy$ $U = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}(\ln x + 1) + c = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$

Otro método	
Integro: [I]	$U_x = P = \frac{(y+\ln x)}{x^2}$ → $\int dU = \int \frac{(y+\ln x)}{x^2} dx$ → $U_x = \frac{y}{-x} - \frac{(\ln x + 1)}{x} + g_{(y)}$ [III]
Derivo [III] respecto de y:	$U_x = \frac{1}{-x} + g'_{(y)}$ [IV]
Igualo [IV] = [II]:	$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + g'(y)$, por tanto: $g'_{(y)} = \frac{dg(y)}{dy} = 0$ → $g_{(y)} = 0dy$
Integro:	$\int g_{(y)} = \int 0.dy$, → $g_{(y)} = 0 + C$ [V]
Reemplazo [V] en [III]:	$U = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial **$(3x + 2y^2)\,dx + 2xydy = 0$**

1. Verificamos si se cumple: $\frac{\partial .Q}{\partial .x} = \frac{\partial .P}{\partial .y}$ Para ello, comparando **$P_{(x,y)}$ dx + $Q_{(x,y)}$ dy = 0**

   obtenemos $P = 3x + 2y^2$; $Q = 2xy$, luego: $\frac{\partial .P}{\partial .y} = 4y$ $\frac{\partial .Q}{\partial .x} = 2y$ por tanto no es exacta.

2. Función del factor de integración: $Fx = \frac{1}{Q}(\frac{\partial .P}{\partial .y} - \frac{\partial .Q}{\partial .x})$ donde: $Fx = \frac{1}{2xy}.(4y - 2y) = \frac{1}{x}$

3. Hallamos el factor de integración reemplazando $Fx = \frac{1}{x}$ en $e^{\int F(x)d.x} = e^{\int \frac{1}{x}d.x} = e^{\log x} = x$

4. Ecuación equivalente, multiplico $(3x+2y^2)\,dx + 2xydy = 0$ por el factor de integración **x** $(3x^2+2xy^2)\,dx + 2x^2ydy = 0$

5. Sobre esta ecuación $(3x^2 + 2xy^2)\,dx + 2x^2ydy = 0$ verificamos la condición $\frac{\partial .Q}{\partial .x} = \frac{\partial .P}{\partial .y}$, para ello, comparamos $(3x^2 +2xy^2)\,dx + 2x^2ydy = 0$ con $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ obteniendo los nuevos valores de $P = 3x^2 +2xy^2$ y $Q = 2x^2y$, cuyas derivadas serán $\frac{\partial .Q}{\partial .x} = \frac{\partial .P}{\partial .y} = 4xy$. Ya

   podemos usar **$U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\, Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\, \partial y$**

   Reemplazo $P(x,y)=3x^2+2xy^2$ → $Q(x,y) = 2x^2y$

   U=∫▒ [(3 x↑2 + 2xy↑2])dx + ∫▒[(2x↑2 y) − (↓dy↑d)(∫▒(3 x↑2 + 2xy↑2)dx] dy

   $U= x^3 + x^2y^2 \int [(2x^2y) - \frac{d}{dy}(x^3 + x^2y^2)]\,dy$ → $U=x^3 + x^2y^2 + \int [(2x^2y) - 2x^2y]\,dy$

   $U=x^3 + x^2y^2 + C$

Ejemplo: Resolver **$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$**

- Identificando $P = 3xy + y^2$, $Q = x^2 + xy$
- Derivando $P_y = 3x + 2y$, $Q_x = 2x + y$

Como $\frac{\partial .Q}{\partial .x} \neq \frac{\partial .P}{\partial .y}$, se busca factor integrante, empezando con la variable x :

[u(x) = U] multiplicando en ambos miembros de la ecuación original.

$U (3xy + y^2)\, dx + U (x^2 + xy)\, dy = 0$

Identificando $P = U\,3xy + U\,y^2$, $Q = U\,x^2 + U\,xy$

Derivando $P_y = U\,3x + U\,2y$; $Q_x = U'x^2 + U\,2x + U'\,xy + Uy$

simplificando $P_y = U\,(3x + 2y)$; $Q_x = U'(x^2 + xy) + U(2x + y)$

Se impone la condición $P_y = Q_x$

$U (3x + 2y) = U'(x^2 + xy) + U(2x + y)$

Algebraicamente $U (x + y) = U' (x + y)\, x$ divido en (x + y) , (x + y) distinto de 0

$U = U'x$ → $U = (dU / dx).x$

separando variables $(dU / U) = (dx / x)$

integrando ambos miembros $\int \frac{dU}{U} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln U = \ln x$ por definición $U = e^{\ln x}$

factor de integración $U = x = u(x)$

multiplicando el factor en la Ec. original obtenemos: $x(3xy + y^2)dx + x(x^2 + xy)dy = 0$

Ahora $P = 3x^2y + xy^2$ $Q = x^3 + x^2y$

$P_y = 3x^2 + 2xy$ $Q_x = 3x^2 + 2xy$

Para resolver con: **$U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\, Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\, \partial y$**, desarrollo los miembros por separado:

$$\int Pdx = \int (3x^2y + xy^2)dx = 3y\int x^2dx + y^2\int xdx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\int Pdx) = x^3 + x^2y$$

$$\int [Q - \frac{\partial}{\partial y}(\int Pdx)]dy = \int (x^3 + x^2y - x^3 - x^2y)dy = 0$$ solución: $U = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c$

Para resolver ésta ecuación de otro modo, uso los pasos para obtener la fórmula general:

- Como $U_x = 3yx^2 + xy^2$, integrando: $\int (3yx^2 + xy^2)dx$ $U = x^3 y + \frac{x^2}{2} y^2 +$ g(y) (3)
- Derivando respecto de "y": $U_y = x^3 + x^2 y +$ g'(y) (4)
- Igualo (4) y (2) $x^3 + x^2 y$ = + g'(y) , resulta g'(y) = 0 Integro: $\int g(y) =$ $\int 0dy = 0 + C = g(y)$ (5)
  - Reemplazando (5) y (3) U = $x^3 y + \frac{x^2y^2}{2} + c$

Ejemplo: Resolver: **$(6x + 4y^2)dx + 4xy.dy = 0$**

Identificando $P = 6x + 4y^2$ $Q = 4xy$

Derivando $P_y = 8y$ $Q_x = 4y$

Calculando el factor de integración: $F(x) = \frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{1}{4xy}(8y - 4y) = \frac{4y}{4xy} = \frac{1}{x}$

El factor será: $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

Multiplicando por el factor: $x(6x + 4y^2).dx + x(4xy).dy = 0$

$(6x^2 + 4y^2 x)dx + (4x^2 y) = 0$

Ahora $P = 6x^2 + 4xy^2$ $Q = 4x^2 y$

verificando si cumplen la condición de Exactas: $P_y = 8yx$, $Q_x = 8yx$

Usando la fórmula: **$U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\, Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\, \partial y$**

Resolviendo paso a paso:

1ro) $\int P.dx = \int (6x^2 + 4xy^2)dx = 2x^3 + 2x^2 y^2$

2do) $\frac{\partial}{\partial y}\int Pdx = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2x^2y^2) = 4x^2 y$

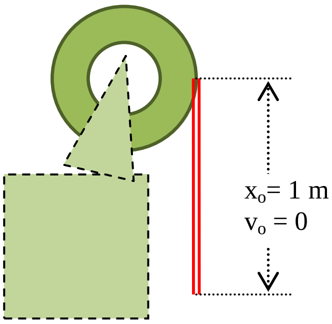
3ro) $\int [Q - \frac{\partial}{\partial y}(\int P.dx)]dy = \int (4x^2 y - 4x^2 y)dy = 0$, la solución será: **$U = 2x^3 + 2x^2y^2 + c$**

Para resolver ésta ecuación de otro modo, uso los pasos para obtener la fórmula general:

- Como $U_x = 6x^2 + 4xy^2$, integro: $\int [6x^2 + 4xy^2)\, dx]$ $U = 2x^3 + 2x^2 y^2 +$ g(y) (3)
- Derivo respecto de "y": $U_y = 4x^2 y +$ g'(y) (4)
- Igualo (4) y (2) $4x^2 y = 4x^2 y$ + g'(y), resulta g'(y) = 0 Integro: $\int g(y) =$ $\int 0dy = 0 + C = g(y)$ (5)
  - Reemplazo (5) y (3) **$U = 2x^3 + 2x^2y^2 + c$**

APLICACIÓN: CINTA FLEXIBLE

Una cinta flexible de 4 m de longitud tiene enrollados 3 m en un carretel y el resto cuelga libre y verticalmente.



Si al instante **t = 0**, (por efecto del peso de la parte de cinta que cuelga), la cinta comienza a desenrollarse, cuanto trascurrirá hasta que toda la cinta quede colgada? (Suponer fuerzas de fricción nulas)

Datos:

- **w** [Kg/m] Densidad lineal de la cinta
- $\mathbf{x}_{(t)}$ Longitud de la cinta colgada en el instante t
- $\mathbf{v}_{(t)}$ Velocidad de caída de la cinta en el instante t
- $\mathbf{x}_{(o)}$ Longitud de la cinta colgada en el instante t = 0
- $\mathbf{v}_{(o)}$ Velocidad de caída de la cinta en el instante t = 0

I.-Determinación de la ecuación diferencial:

- Masa de la cinta colgada: **m = w.x** [**I**]
- Fuerza gravitacional que actúa sobre la cinta colgada: **F = m.g = w.x.g** [**II**]
- De: $\mathbf{F = m.a = m}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(mv)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\mathbf{(w.x.v)}$ [**III**]→ [**II**] = [**III**] → $\mathbf{w.x.g} = \dfrac{d}{dt}\mathbf{(w.x.v) = w}\dfrac{d}{dt}\mathbf{(x.v) = w\,(\,x}\dfrac{dv}{dt} + \mathbf{v}\dfrac{dx}{dt}\mathbf{)}$

Simplifico: $\mathbf{x.g = (\,x}\dfrac{dv}{dt} + \mathbf{v}\dfrac{dx}{dt}\mathbf{)}$ [**IV**] Si: $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\dfrac{dv}{dx}$, [**IV**] → $x.g = (\,x\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{dx}{dt}\,)$

y como $\dfrac{dx}{dt}$ = v → $x.g = (\,x.v.\dfrac{dv}{dx} + v^2\,)$, → $\mathbf{x.g - (\,x.v.}\dfrac{dv}{dx} + \mathbf{v^2\,) = 0}$ [**V**]

- Multiplico [**V**] por -dx: $\mathbf{-x.g.dx +(\,x.v.}\dfrac{dv}{dx} + \mathbf{v^2\,)dx = 0}$ → $\mathbf{-g.x.dx + x.v.dv + v^2dx = 0}$

Agrupo términos: $\mathbf{-g.x.dx + v^2\,dx + x.v.dv = 0}$ → $\mathbf{(v^2 - g.x.)dx + x.v.dv = 0}$

Divido por **x** → $\mathbf{(}\dfrac{v^2}{x}\mathbf{- g\,)dx + v.dv = 0}$ [**VI**]: **ecuación diferencial a resolver**.

II.-Solución:

Comparo: $\mathbf{(}\dfrac{v^2}{x}\mathbf{- g\,)dx + v.dv = 0}$ con: $\mathbf{P_{(x,v)}dx + Q_{(x,v)}dv = 0}$, resulta:

- $\mathbf{P_{(x,v)} = U_x = (}\dfrac{v^2}{x}\mathbf{- g\,)}$; luego $\dfrac{\partial P}{\partial v} = \dfrac{2.v}{x}$ → $\mathbf{Q_{(x,v)} = U_v = = v}$; luego: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$

Como: $\dfrac{\partial.Q}{\partial.x} \neq \dfrac{\partial.P}{\partial.y}$, la ecuación $\mathbf{(}\dfrac{v^2}{x}\mathbf{- g\,)dx - v.dv = 0}$ no es exacta.

Factor Integrante: Si: $Fx = \dfrac{1}{Q}(\dfrac{\partial.P}{\partial.y} - \dfrac{\partial.Q}{\partial.x})$ $Fx = \dfrac{1}{v}(\,\dfrac{2.v}{x} - 0\,) = \dfrac{2}{x}$, luego: $\int Fx.dx = \int \dfrac{2}{x}dx = 2.\ln.x$

- El **factor integrante** es: $e^{\int F(x)dx} = e^{2.\ln.x} = \mathbf{x^2}$

Determinación de la ecuación diferencial equivalente:

Multiplico $\mathbf{(}\dfrac{v^2}{x}\mathbf{- g\,)dx + v.dv = 0}$ por **factor** $\mathbf{x^2}$ → $(x^2\dfrac{v^2}{x} - g\,x^2)dx + x^2v.dv = 0$, simplifico:$\mathbf{(x.v^2 - g\,x^2\,)dx + x^2v.dv = 0}$

Comparo: $\mathbf{(x.v^2 - g\,x^2\,)dx + x^2v.dv = 0}$ con: $\mathbf{P(x,v)\,dx + Q(x,v)\,dv = 0}$, resulta:

- $\mathbf{P(x,v) = U_x = (x.v^2 - g\,x^2\,)}$ [**VII**] luego: $\dfrac{\partial P}{\partial v} = \mathbf{2.\,x.v}$ → $\mathbf{Q(x,v) = U_v = x^2v}$ [**VIII**] luego: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \mathbf{2.\,x.v}$

Como $\mathbf{(xv^2 - gx^2)dx + x^2vdv = 0}$, es exacta, aplico: $\mathbf{U = \int P_{(x,y)}dx + \int[\,Q_{(x,y)} - \dfrac{\partial}{\partial y}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\,\partial y}$

- Reemplazo: [**VII**] y [**VIII**], resulta: $\mathbf{U = \int(x.v^2 - g\,x^2\,)dx + \int[x^2v - \dfrac{\partial}{\partial v}(\int(x.v^2 - g\,x^2)dx\,)]\,\partial.v}$ [**IX**]

$\mathbf{U = \int(x.v^2 - g\,x^2\,)dx + \int x^2v\,\partial.v - \int \dfrac{\partial}{\partial v}(\int(x.v^2 - g\,x^2)dx\,)\,\partial.v = \int(x.v^2 - g\,x^2\,)dx + \int x^2v\,\partial.v - \int(x.v^2 - g\,x^2)dx}$

$\mathbf{U = \int x^2v\,\partial.v = \dfrac{1}{2}x^2\,v^2 + C}$ ← Solución particular

- Resuelvo: $\mathbf{\int(x.v^2 - g\,x^2)dx = v^2\int x.dx - g\int x^2dx = \dfrac{1}{2}x^2v^2 - \dfrac{1}{3}g\,x^3}$ [**X**]

- Reemplazo [X] en [IX] Solución general : $U = \int (x.v^2 - g\,x^2)dx + \int [x^2v - \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3)]\,\partial.v$

$$U = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3 + \int [x^2v - \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3)]\,\partial.v = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3 + \int x^2v\,\partial.v - \frac{1}{2}\int x^2v^2\,\partial.v - \frac{1}{3}\int g\,x^3\,\partial.v$$

$$U = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3 + \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{2}x^2v^3 - 0 = \frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3 - \frac{1}{6}x^2v^3. = x^2v^2 - \frac{1}{3}g\,x^3 - \frac{1}{6}x^2v^3 + C$$

- Reemplazo las condiciones iniciales: $x_o = 1$m y $v_o = 0$, → $C = -\frac{g}{3}$ la solución particular:

$$U = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{g}{3}v^2 - \frac{g}{3} = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{g}{3}(v^2 - 1), \rightarrow \frac{1}{2}x^2v^2 = \frac{g}{3}(v^2 - 1)$$

Despejo x: $x^2 = \frac{2g}{3v^2}(v^2 - 1)$; → $x = [\frac{2g}{3v^2}(v^2 - 1)]^{1/2}$

- Como: $v = \frac{dx}{dt}$ → $dt = \frac{dx}{v}$ reemplazo $x = [\frac{2g}{3v^2}(v^2 - 1)]^{1/2} = [\frac{2g}{3}(1 - v^2)]^{1/2}$, luego

$dt = \frac{1}{v}d\{[\frac{2g}{3}(1 - v^2)]^{1/2}\}$, integrando: $t = \int \frac{1}{v}d\{[\frac{2g}{3}(1 - v^2)]^{1/2}\}$, es el tiempo buscado.

Como P_v y Q_x son iguales resuelvo utilizando la formula $U = \int P_{(x,y)}dx + \int [\,Q_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial v}(\int P_{(x,y)}dx)\,]\,\partial v$

$$U = \int (-x^2g + v^2x)dx + \int \left(x^2v - \frac{d\int (-x^2g + v^2x)}{dv} \right) dv = \frac{-gx^3}{3} + v^2\frac{x^2}{2} + \int (x^2v - x^2v)dv = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}x^3g + C$$

Reemplazo: t=0, v=0, x= 1 m, g=9,8: $t = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}x^3g + C$ → $0 = \frac{1}{2}*1*0 - \frac{1}{3}*1^3*9.8 + C$ Reemplazo C = 3.27 en:

$t = \frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{1}{3}x^3g + 3.27$ Para: x=4 v=1/2 g t → $t = \frac{1}{2}4^2\frac{1}{4}*9.8^2t^2 - \frac{1}{3}*4^3*9.8 + 3.27$

$t = \frac{1}{2}*4^2*\frac{1}{4}9.8^2t^2 - t - 209.07 + 3.27$ →El tiempo: $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4*192.08*(-205.8)}}{384.16}$ → $t_1 = 1.04seg$, $t_2 = -1.04seg$

El tiempo que transcurrirá hasta que toda la cinta quede colgada es 1.04 seg

Otra manera de resolver es aplicando los pasos de la obtención de la fórmula general:

- Integro: $P_{(x,v)} = U_x = (x.v^2 - g\,x^2)$ [1] → $\int dU = \int (x.v^2 - g.x^2)dx$ → $U_x = \frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{1}{3}g.x^3 + g_{(v)}$ [2]
- Derivo respecto de "v": $U_y = x^2v + g'_{(v)}$ de donde $g'_{(v)} = -x^2v$
- O sea $g'_{(v)} = -\frac{dg(v)}{dv} = x^2v$ Integro $\int g(v). = -x^2.\int v.dv$ → $g_{(v)} = -\frac{1}{2}x^2v^2$
- Reemplazo en [2] $U = \frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{1}{3}g.x^3 + g_{(v)} = \frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{1}{3}g.x^3 - \frac{1}{2}x^2v^2 = \frac{1}{3}g.x^3$ [3]
- Para la condición: $x = 1$, entre [1] y [3], $(x.v^2 - g\,x^2) = \frac{1}{3}g.x^3$; la velocidad: $v = (\frac{1}{3}g)^{1/2}$
- El tiempo corresponde a la longitud total de cinta: $x = 4$, que reemplazo en: $dt = \frac{dx}{v}$

ECUACIÓN HOMOGENEA

La ecuación diferencial de 1er orden de la forma: $M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$ es homogénea si sus valores $M_{(x,y)}$ y $N_{(x,y)}$ son funciones homogéneas de **x** e **y**. Se resuelve aplicando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M}{N} = F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad [1]$$

Deducción: Si $y = v \cdot x$, su derivada es: $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}.x + \frac{dx}{dx}v.$ [2]

Comparo [2] con [1] : $\frac{dv}{dx}.x + \frac{dx}{dx}v. = \frac{-M}{N} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-M}{N}$

Para resolver estas ecuaciones	Ejemplo
Llevo a la forma: $M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$	$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$ $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$ [I]
Respecto de **x** derivo → $y = v\,x$ [II]	$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v\frac{dx}{dx} \rightarrow$ **dy = vdx + xdv** [III]
Reemplazo [II] y [III] en [I]:	$(vx)^2dx + (x^2 - x^2v).(vdx + xdv) = 0$
Resuelvo y simplifico:	$v^2x^2dx + x^2vdx + x^3dv - x^2\ v^2dx - x^3vdv = 0$ $x^2vdx + x^3dv - x^3vdv = 0 \rightarrow vdx + x(1-v)dv = 0$
Separo variables respecto de **v** →	$\frac{dx}{x} + \frac{1-v}{v}dv = 0$
Integro respecto de **v** →	$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{1-v}{v}dv = 0 \rightarrow \ln x + \ln v - v = c$
Reemplazo el valor de **v** →	$v = \frac{y}{x} \rightarrow \ln x + \ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = c$
Solución:	$\ln y - \frac{y}{x} = c$

La ecuación diferencial de 1er orden de forma: $\frac{dy}{dx} + P_{(x)}y = Q_{(x)}y^n$, es **ECUACIÓN DE BERNOUILLI**, la cual si: $n \neq 0$, ó $n \neq 1$, es lineal.

Proceso:	Ejemplo:

Llevo a la forma: **M$_{(x,y)}$dx + N$_{(x,y)}$dy = 0**	**Resolver:** $\frac{dy}{dx}=\frac{x.y-y^2}{x^2}$ **-(xy- y^2)dx + x^2 dy = 0** [I]
Respecto de **X** derivo → **y = v x** [II]	$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v\frac{dx}{dx}$ → **dy = vdx + xdv** [III]
Reemplazo **[II]** y **[III]** en **[I]**:	$\frac{dv}{dx}x+v=\frac{x^2v-x^2v^2}{x^2}$ → $\frac{dv}{dx}x+v=\frac{x^2v-x^2v^2}{x^2}$
Resuelvo y Simplifico:	$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{x^2(v-v^2)}{x^2}=v-v^2$ →
Separo variables respecto de **V** →	$\frac{dx}{x}=-\frac{dv}{v^2}$
Integro respecto de **V** →	$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dv}{v^2}$ → $\ln\|x\|-\frac{1}{v}+c=0$
Reemplazo el valor de **V** →	$\ln\|x\|-\frac{1}{(y/x)}+c$ = $\ln\|x\|-\frac{x}{y}+c$ =0

ECUACIÓN HOMOGENEA	
Proceso	Ejemplo:
Llevo a la forma: **M$_{(x,y)}$dx + N$_{(x,y)}$dy = 0**	**Resolver:** y' $=\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)}{2x}$ **(x+y)dx – 2x dy = 0** [I]
Respecto de **X** derivo → **y = v x** [II]	$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v\frac{dx}{dx}$ → **dy = vdx + xdv** [III]
Reemplazo **[II]** y **[III]** en **[I]**:	$(x+vx)dx-2x.(vdx+xdv)=0$ $x.dx+v.x.dx-2x.v.dx-2x^2dv=0$
Resuelvo y Simplifico:	$xdx.-.x.v.dx+2x^2.dv=0$ → $(1-v).xdx+2x^2.dv=0$ $\frac{x.dx}{2x^2}+\frac{dv}{(1-v)}=0$
Separo variables respecto de **V** →	$\frac{dx}{2x}+\frac{dv}{(1-v)}=0$
Integro respecto de **V** →	$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}.+\int\frac{dv}{(1-v)}=0$

Ejemplo: Resolver y' $= \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

1. Llevando a la forma: **$M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$** obtenemos: x.y.dx - ($x^2 - y^2$) dy = 0 (1) en la que debemos reemplazar los valores de "y" y dy
2. Si: y = v x (2) su derivada respecto de x es: $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v\frac{dx}{dx}$, o sea: dy = vdx + xdv (3).
3. Reemplazando (2) y (3) en (1): $vx^2dx - .(x^2 - x^2v^2)(vdx + xdv) = 0$ o sea que $v.x^2dx - (v.x^2dx + x^3dv - x^2.v^3dx - x^3.v^2dv) = 0$, → $-x^3dv + x^2.v^3dx + x^3.v^2dv = 0$ de donde $-dv + \frac{1}{x}.v^3dx + .v^2dv = 0$; → $-\frac{dv}{v^3} + \frac{dx}{x} + .\frac{dv}{v} = 0$ ó $-\int\frac{dv}{v^3} + \int\frac{dx}{x} + .\int\frac{dv}{v} = 0$

Ejemplo: Resolver x dy - (2xe$^{-y/x}$ + y)dx = 0

1. Llevando a la forma: **$M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$** obtenemos (2xe$^{-y/x}$ + y)dx - x dy = 0 (1)
2. Si y = v x (2) su derivada respecto de x es: $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v\frac{dx}{dx}$, o sea: dy = vdx + xdv (3).
3. Reemplazando (2) y (3) en (1): (2xe$^{\frac{-v.x}{x}}$ + v.x)dx - x (vdx + xdv) = 0 $2.x.e^{-v}dx + v.x.dx - v.x.dx - .x^2dv = 0$, → $2.x.e^{-v}dx - .x^2dv = 0$ de donde $\frac{1}{x^2.e^{-v}}2.x.e^{-v}dx - \frac{1}{x^2.e^{-v}}.x^2dv = 0$; → $\frac{2dx}{x} - .e^{v}dv = 0$, luego $2\int\frac{dx}{x} - .\int e^{v}dv = 0$

Ejemplo: Resolver $2xydy = (x^2 - y^2)dx$

1. Llevando a la forma: **$M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$** obtenemos: ($x^2 - y^2$) dx - 2 x.y.dY - = 0 (1) en la que debemos reemplazar los valores de "y" y dy
2. Si: y = v x (2) su derivada respecto de x es: $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v\frac{dx}{dx}$, o sea: dy = vdx + xdv (3).
3. Reemplazando (2) y (3) en (1): $(x^2 - x^2v^2)dx - 2xvx(vdx + xdv) = 0$ o sea que $x^2dx - v^2.x^2dx - 2x^2x^2dv - 2x^3.vdv = 0$, → $-x^3dv + x^2.v^3dx + x^3.v^2dv = 0$ de donde $x(.v^2 - 1)dv + .v^3dx = 0$;→ $\frac{(v^2-1)dv}{v^3} + \frac{dx}{x} = 0$, Integrando $\int\frac{(v^2-1)dv}{v^3} + \int\frac{dx}{x} = 0$

Ejemplo: Resolver y' $= \frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)}{2x}$

1. Llevando a la forma: **$M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$** → (x+y)dx – 2x dy = 0 (1) en la que debemos reemplazar los valores de "y" y dy
2. Si y = v x (2) su derivada respecto de x es: $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v\frac{dx}{dx}$, o sea: dy = vdx + xdv (3).
3. Reemplazando (2) y (3) en (1): $(x + vx)dx - 2x.(vdx + xdv) = 0$ o sea que $x.dx + v.x.dx - 2x.v.dx - 2x^2dv = 0$, → $xdx. - .x.v.dx + 2x^2.dv = 0$ de donde $(1 - v).xdx + 2x^2.dv = 0$→ $\frac{x.dx}{2x^2} + \frac{dv}{(1-v)} = 0$; ó $\frac{dx}{2x} + \frac{dv}{(1-v)} = 0$ ó $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}. + \int\frac{dv}{(1-v)} = 0$

   Volviendo a la variable original nuestra solución será: $\frac{1}{2}\ln|x| + \ln\left|1 - \frac{y}{x}\right| + c = 0$

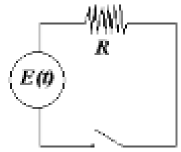
Ejemplo: Resolver: **dy(x-y) = (x+y)dx**

- Acomodo de la forma $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)}{(x-y)}$ **(1)**
- Cambio de variable y sustitución por: y = vx **(2)** su derivada con respecto a x
  $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}x+v\frac{dx}{dx}=\frac{dv}{dx}x+v$ **(3)** reemplazando (2) y (3) en (1): $\frac{dv}{dx}x+v=\frac{x+vx}{x-vx}$
- Luego: $\frac{dv}{dx}x+v=\frac{x+vx}{x-vx}\rightarrow\frac{dv}{dx}x=\frac{x(1+v)}{x(1-v)}-v\rightarrow\frac{dv}{dx}x=\frac{1+v^2}{1-v}\rightarrow\frac{x}{dx}=\frac{1+v^2}{1-v}.\frac{1}{dv}$
- Separao variables: $\frac{dx}{x}=\frac{1-v}{1+v^2}dv\rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-v}{1+v^2}dv$
- Vuelvo a variable original: $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-v}{1+v^2}dv\rightarrow\ln|x|-\arctan(\frac{y}{x})+\frac{1}{2}\ln\left|1+(\frac{y}{x})^2\right|$ + C = 0

APLICACIÓN ECUACIÓN HOMOGENEA: CAIDA DE VOLTAJE

En la resistencia conectada a una fuente, demostrar la caída de voltaje en el tiempo provocada por la resistencia, para un régimen de corriente continua.
Datos:

R=8 ohm
E (t)=10v



Por Ohm: **IR = E(t)**, además la corriente **I** es el flujo de carga **q** por unidad de tiempo **t** : $I=\frac{dq}{dt}$

Reemplazando I y E(t) en: RI = E(t), resulta: $8\frac{dq}{dt}=10$

PROCESO	**Resolver** $8\frac{dq}{dt}=10$
Llevo a la forma: **M$_{(x,y)}$dx + N$_{(x,y)}$dy = 0**	$8\frac{dq}{dt}=10\rightarrow 8dq=10dt\rightarrow 8dq-10dt=0$ **[I]**
Respecto de **t** derivo → **q = v t** **[II]**	$\frac{dq}{dt}=t\frac{dv}{dt}+v\frac{dt}{dt}\rightarrow dq=vdt+tdv$ **[III]**
Reemplazo **[II]** y **[III]** en **[I]**:	$8(vdt+tdv)-10dt=0$
Resuelvo y Simplifico:	$8vdt+8tdv-10dt=0$ $(8t)dv+(8v-10)dt=0$
Separo variables respecto de **V** →	$\frac{dv}{8v-10}+\frac{dt}{8t}=0$
Integro respecto de **V** →	$\int\frac{dv}{8v-10}+\int\frac{dt}{8t}=0\rightarrow\int\frac{dv}{8v-10}+\frac{1}{8}\int dt=0$
Solución: La caída de voltaje que provoca la resistencia es:	$\frac{1}{8}\ln|8v-10|+\frac{1}{8}t=0$

ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL: EDOL

Tiene la forma: $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + .. + a_1(x)\, y' + a_o(x)y = g_{(x)}$

Caracteristicas	Ejemplos: La EDOL	Ejemplos: Tiene por solución
• La función y sus derivadas están elevadas a potencias mayor a cero.	• $y' = y$: 1er orden:	$y = f_{(x)} e^x$.
• En cada coeficiente sólo interviene la variable independiente.	• $y'' + y = 0$: 2do orden:	$y = f_{(x)} = a\,Cos(x) + b\,Sen(x)$ con **a** y **b** reales.
• La combinación lineal de soluciones es también solución de la ecuación.	• $y'' - y = 0$: 2do orden:	$y = f_{(x)} = a\,Cosh(x) + b\,Senh(x)$ con **a** y **b** reales.

EDOL de 1er ORDEN

Tiene la forma: $y' + P\,y = Q$ y se resuelve con: $y = e^{-\int P dx}[\int Q . e^{\int P dx}\, dx + c]$

Que resulta de:

1. Multiplico $y' + P\,y = Q$ por un valor ficticio "R" → $y'R + PR.y = Q.R$ (2)
2. La derivada de R respecto a "x" debe cumplir que: $\frac{dR}{dx} = PR.$, separo variables e integro:

   $\int \frac{dR}{R} = \int P dx, \rightarrow \ln R = \int P dx, \rightarrow R = e^{\int P.d.x}$ (3)
3. Reemplazo $y' = \frac{dy}{dx}$ y $PR = \frac{dR}{dx}$ en (2), obtengo $\frac{dy}{dx} R + \frac{dR}{dx} y = Q.R..$ (4)
4. Por otra parte, como $\frac{d(R.y)}{dx} = \frac{dy}{dx} R + \frac{dR}{dx} y$ (5)

   Comparo (5) y (4) → $\frac{d(R.y)}{dx} = Q\,R$ → $\int d(Ry) = \int QRdx$ → $R.y = \int QRdx + C$ (6)
5. Reemplazo R de (3) en (6): $e^{\int P.d.x} y = \int Q.e^{P.d.x.} dx + e$, obtengo la fórmula que resuelve las EDOL de 1er orden: $y = e^{-\int P dx}[\int Q .\, e^{\int P dx}\, dx + c]$

EDOL: Proceso	Ejemplo:
• Llevo a la forma: $y' + P\,y = Q$	**Resolver** $y' + (1/x)y = 3x + 4$ • $y' + (1/x)y = 3x + 4$
• Obtengo los coefientes: **P** y **Q**	• $P = 1/x$ y $Q = 3x + 4$
• Reemplazo P y Q en: $y = e^{-\int P dx}[\int Q .\, e^{\int P dx}\, dx + c]$	$y = e^{-\int \frac{x}{dx}} \left(\int (3x+4).e^{\int \frac{x}{dx}} dx + C \right) = e^{-\ln\|x\|} \left(\int (3x+4).e^{\ln\|x\|} dx + C \right)$ $y = \frac{1}{x} \left(\int (3x+4).x\, dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int (3x^2 + 4x) dx + C \right)$
• Resultado:	$y = x^2 + 2x + C$

Ejemplo: Resolver $y' = 4e^{2x} - 2y$

• Llevo a la forma $y' + P y = Q$	• $y' + 2y = 4 e^{2x}$
• Obtengo los coeficientes: P y Q	• $P = 2$ y $Q = 4e^{2x}$
• Reemplazo P y Q en: $y = e^{-\int P dx}[\int Q.\, e^{\int P dx}\, dx + c]$	• $y = 4\int e^{2.x}\, dx + c.e^{-2.x}$ $y = 4 e^{2.x} / 2 + C$
• Resultado	• $y = 2 e^{2.x} + C$

Ejemplo: Resolver $y' = e^x - y$

• Llevo a la forma $y' + P y = Q$	• $y' + 1\, y = e^x$
• Obtengo los coeficientes: P y Q	• $P = 1$ y $Q = e^x$
• Reemplazo P y Q en: $y = e^{-\int P dx}[\int Q.\, e^{\int P dx}\, dx + c]$	$y = e^{-\int 1 dx}\left(\int e^x.e^{\int 1 dx} dx + C\right) = \frac{1}{e^x}\left(\int e^x.e^x dx + C\right)$ $y = \frac{1}{e^x}\left(\int e^{2x} dx + C\right) = \frac{1}{e^x}\frac{e^{2x}}{2} + c = \frac{1}{e^x}\frac{e^{2x}}{2} + c$
• Resultado	• $y = \frac{e^x}{2} + C$

Ejemplo: Resolver $y' - y = \cos x$

• Llevo a la forma $y' + P y = Q$	• $y' - y = e^x$
• Obtengo los coeficientes: P y Q	• $P = -1$ y $Q = \cos x$
• Reemplazo P y Q en: $y = e^{-\int P dx}[\int Q.\, e^{\int P dx}\, dx + c]$	$y = e^{-\int(-1)dx}\left(\int \cos x.e^{\int(-1)dx} dx + C\right) = e^x\left(\int \cos x.e^{-x} dx + C\right)$ $y = e^x\left(-\frac{1}{2}\cos x.e^{-x} - \frac{1}{2} sen x.e^{-x} + c\right) + C$
• Resultado	• $y = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} sen x + C$

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{x+y}{2x}$ Reemplazo por $(y = vx)$; $(y' = xv' + v)$

Luego: $xv' + v = \frac{x+vx}{2x} \rightarrow xv' = \frac{1}{2} + \frac{v}{2} - v \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{v}{2} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}(1-v)$

$\int \frac{dv}{1-v} = \int \frac{1}{2}\frac{dx}{x} \rightarrow$ reemplazo por $v = \frac{y}{x} \rightarrow -\ln\left|1 - \frac{y}{x}\right| = \frac{1}{2}\ln|x| + c$

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \rightarrow v + xv' = \frac{xvx}{x^2 - v^2x^2} \rightarrow v + xv' = \frac{x^2 v}{x^2(1-v^2)}$

$xv' = \frac{v}{1-v^2} - v \rightarrow xv' = \frac{v - v + v^3}{1-v^2} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3}{1-v^2} \rightarrow \int \frac{1-v^2}{v^3} dv = \int \frac{dx}{x}$

$\int\left(\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v}\right) dv = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{v^{-2}}{-2} - \ln|v| = \ln|x| + c$ como: $v = y/x \rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} - \ln\frac{y}{x} = \ln x + c$

Ejemplo: Resolver $y' = \dfrac{3x+2y}{x}$ → $v'x + v = \dfrac{3x+2vx}{x}$ → $v'x + v = \dfrac{3x}{x} + \dfrac{2vx}{x}$

$v'x = 3+v \qquad \dfrac{dv}{dx}x = 3+v \quad \Rightarrow \quad \int \dfrac{dv}{3+v} = \int \dfrac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \ln|3+v| = \ln x + c$

reemplazo por $v = \dfrac{y}{x}$, $\ln\left|3+\dfrac{y}{x}\right| = \ln x + c$ solución general

Ejemplo: Resolver $\dfrac{dy}{dx}(3x - \dfrac{y}{2})$ (1)

$u = 3x - \dfrac{y}{2}$ (2) 6-2u' = y' (3) (3),(2) en (1) $6 - u' = u^2$

$\dfrac{du}{dx} = 3 - \dfrac{u^2}{2} \qquad \int \dfrac{du}{\frac{1}{2}(6 - \frac{u^2}{1})} = \int dx \qquad x = 2\ln\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{u+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-u} + c$ Solución de la ecuación

Ejemplo: Resolver: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3xy}{x^2} = x^2$

Como ya esta de la forma y' + P y = Q(x) identifico: $P(x) = 3x / x^2 = \dfrac{3}{x}$; $Q(x) = x^2$

Integro: $\int Pdx = 3\int \dfrac{dx}{x} = 3.\ln|x| + c$ **(a)** → $\int Q(x).e^{\int Pdx}.dx = \int x^2.x^3.dx = \dfrac{x^6}{6} + c$ **(b)**

Como $y = e^{-\int P.dx}.\left[\int Q(x).e^{\int P.d.x}.dx + c\right]$ con (a) y (b) → $y = e^{-3\ln x}.\dfrac{x^6}{6} + c = \dfrac{x^3}{6} + c$

Ejemplo: Resolver: x^2 y' + x y = 1

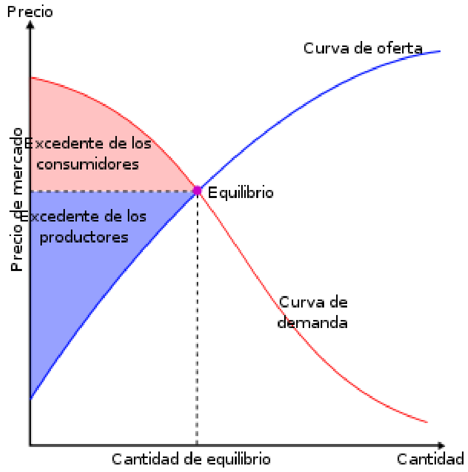
En la forma $y' + y.P = Q(x)$ entonces: $y' + \dfrac{x.y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

Donde $P = \dfrac{1}{x}$, $Q = \dfrac{1}{x^2}$ usando: $y = e^{-\int P.dx}.\left[\int Q(x).e^{\int P.d.x}.dx + c\right]$ y resolviendo:

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}.dx}.\left[\int \frac{1}{x^2}.e^{\int \frac{1}{x}.dx}.dx + c\right] = e^{-\ln x}.\int \frac{e^{\ln x}}{x^2}.dx + c = \frac{1}{x}.\ln|x| + c$$

EDOL: Proceso	Ejemplo:
	Resolver: $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = (e^{\ln.x})^3 + 1$ → $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 1$
• Llevo a la forma: **y' + P y = Q**	• $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x^3+1}{x}$
• Obtengo los coefientes: **P** y **Q**	• **P** = - $\dfrac{2}{x}$ y **Q** = $\dfrac{x^3+1}{x}$
• Reemplazo P y Q en: **y = e$^{-\int Pdx}$[$\int$Q. e$^{\int Pdx}$ dx + c]**	**y** $= e^{-\int \frac{2}{x}dx}.\int \dfrac{x^3+1}{x}.e^{\int \frac{2}{x}dx}.dx + c = e^{-\int \frac{2}{x}dx}.\int \dfrac{x^3+1}{x}.e^{\int \frac{2}{x}dx}.dx + c$ **y** = $\dfrac{1}{x^2}.\int \dfrac{x^3+1}{x}.x^2.dx + c$ = $\dfrac{1}{x^2}.(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + c)$

APLICACIÓN: LEYES DE OFERTA y DEMANDA



OFERTA: Cantidad directamente proporcional al precio de bienes ofrecidos por proveedores y vendedores del mercado. Sus curvas son casi siempre crecientes y su pendiente suele ser también creciente.

DEMANDA: Bienes y servicios que los consumidores desean comprar según de su poder adquisitivo y del precio. Normalmente, el mercado equilibra la oferta con la demanda.
Donde:

- **p(t)**: **p** precio del bien por unidad de tiempo**.**
- **D(t)** o **D**: Unidades demandadas por unidad de tiempo **t**, depende del precio y dirección que los consumidores creen que tomara el precio, o tasa de cambio del precio o derivada **p´(t)**.
  Asi: Precio alto en tiempo **t** sube la demanda: **D = f(p(t), p´(t))**
- Oferta **S(t)**, o **S**: Unidades del bien que disponen los productores por unidad de tiempo **t**, que también depende de **p(t)** y **p´(t)**. Ejemplo, si el precio es alto en tiempo **t** y los productores creen que subirá mas, la oferta disponible tiende a incrementar, Así: **S = g(p(t), p´(t))** → **g:** la función oferta.

PRINCIPIO ECONÓMICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA:
El precio del bien en tiempo **t**, es, **p(t),** si la demanda en **t** es igual a la oferta en **t**: **f(p(t), p´(t)) = g(p(t), p´(t))**
Las formas que debería tener ***f*** y **g** son:

- **D = *f*(p(t), p´(t)) = A1p(t) + A2p´(t) + A3**
- **S = g(p(t), p´(t)) = B1p(t) + B2p´(t) + B3**

Si: **A´S** y **B´S** constantes: **A1p(t) + A2p´(t) + A3=B1p(t)+B2p´(t) +B3 → (A2 – B2)p´(t) + (A1–B1)p(t)= B3–A3**

Si: **A1≠B1, A2≠B2** y **A3≠B3→p´(t) + (A1-B1/A2-B2)p(t) = B3-A3/A2-B2**, ecuación lineal de 1er orden de forma: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ donde: P = **(A1-B1/A2-B2)** y Q = **B3-A3/A2-B2** que se resuelve con: $y = e^{-\int P dx}[\int Q .\, e^{\int P dx}\, dx + c]$

Cuando: **P = Po** en **t = 0** → **p(t) = B3-A3/A1-B1 + [Po- (B3-A3/A1-B1)]e**

- Caso I: Si **Po = (B3-A3)/(A1-B1) y p(t)=Po**, los precios permanecen constantes en todo tiempo.
- Caso II: Si **(A1-B1)/A2-B2)>0**, estabilidad de precios.
- Caso III: Si **(A1-B1)/A2-B2)<0**. la ecuación **p(t) = B3-A3/A1-B1 + [Po- (B3-A3/A1-B1)]e** donde el precio **p(t)** crece a medida que **t** crece, asumiendo que **Po > (B3-A3)/A1-B1)**, inflación continuada o inestabilidad de precio.

Continua hasta que los factores económicos y la ecuación cambien: (A2 – B2)p´(t) + (A1 – B1)p(t) = B3 –A3.
La demanda y oferta en miles de unidades: **D = 48 – 2p(t) + 3p´(t), S = 30 + p(t) + 4p´(t)**, respectivamente.
Si en **t =0** el precio del bien es **10** unidades, determinar:

- El precio en cualquier tiempo t > 0
- Si hay estabilidad o inestabilidad de precio.

Solución: El precio p(t) cuando: oferta = demanda: **48 – 2p(t) + 3p´(t) = 30 + p(t) + 4p´(t) = p´(t) + 3 p(t) = 18**

De la ecuación lineal: **p = 10** en **t = 0**, resulta: **p(t) = 6 + 4e**. Sí **t→∞, p→6**, el precio de equilibrio: **6** unidades.

APLICACIÓN: ANTIGÜEDAD DEL FOSIL

Determinar la edad de un fósil de hueso que contenía la centésima parte de la cantidad original de C-14.

El punto de partida es: $\mathbf{A_{(t)}} = \mathbf{A_{(0)}}\, e^{kt}$ donde: $\mathbf{A_{(0)}}$: Existencia inicial

K: Constante de crecimiento si k>0 y decrecimiento si k<0,

t: Edad del fósil.

Calculo de K: Si $\frac{A_0}{2} = A(5600)$ por C-14, → $\frac{A_0}{2} = A_0 e5600k$

Elimino $\mathbf{A_{(0)}}$, por logaritmo: $5600k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, luego $K = \frac{-(\ln 2)}{5600} = -0{,}00012378$.

volvemos al punto de partida: $\mathbf{A_{(t)}} = \mathbf{A_{(0)}}\; e^{-0{,}00012378t}$ → $\mathbf{A_{(0)}}$ /1000= $\mathbf{A_{(0)}}\; e^{-0{,}00012378t}$ →-0,0001237

t=ln(1/1000)= -ln 1000 → t= ln 1000/0,001237 = **55800** años

Así la edad del fósil está en el límite de exactitud del método. Esta técnica se limita a unos 9 periodos medios del isótopo, que son unos 50000 años (5600 aprox por período), porque es el análisis químico necesario para una determinación exacta del C-l4 remanente presenta obstáculos cuando se alcanza el punto de $\mathbf{A_{(0)}}$: /1000.

APLICACIÓN: ENFRIAMIENTO DE UN CUERPO

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300°F y luego de 3 minutos, 200°F. ¿En cuanto tiempo se enfriará hasta temperatura ambiente de 70°F?

La Ley de Newton del enfriamiento, relativa al enfriamiento de un objeto, se expresa con la **ecuación diferencial lineal de primer orden**, donde **k** es una constante de proporcionalidad, **T(r)** es la temperatura del objeto cuando t > 0 y **Tm** es la temperatura ambiente que rodea al objeto.

Su fórmula es: $\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$

Del valor inicial $\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$, **T(o) = 300** y determinamos **k** para: **t(3) = 200**,

Separamos variables: $\frac{dT}{T-70} = kdt$ → **ln|T-70|=kt+C1**; así $T = 70 + C2e^{kt}$,

Cuanto **t=0** y **T=300** define que **300 = 70 + c2**, → **C2 = 230**.

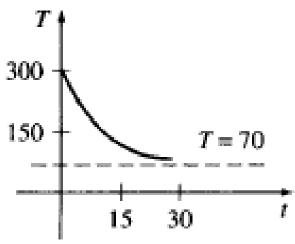
Entonces: $T = 70 + 230e^{kt}$, de t(3)=200 → $e^{3k} = \frac{13}{23}$, o sea, $k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0{,}19018$, así $T(t) = 70 + 230e^{-0{,}19018}$

Esta ecuación no tiene una solución finita a T(t) = 70 porque: $\mathbf{lim_{(x\text{-}oo)}\, T_{(t)}} = 70$.

Las partes a) y b) del esquema muestran que el pastel estará a la temperatura ambiente pasada una media hora.

$T(t)$	t (min)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

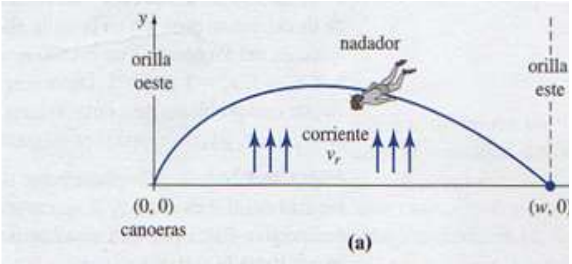
(b)



(a)

APLICACIÓN: CRUCE A NADO

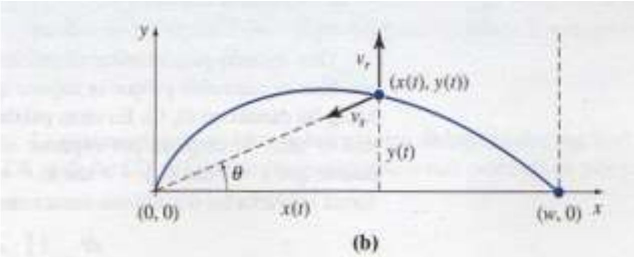
¿Qué tan rápido debo nadar para llegar a la otra orilla sin ser arrastrado por la corriente hacia los rápidos?".



Definir un sistema de ecuaciones diferenciales que describe su velocidad en cualquier punto del río.

Primer paso: Introducir sistema de coordenadas. Asignar la dirección positiva o norte al flujo del río

Ubicar a unas canoeras en el punto **(0,0)** en la orilla oeste y ubicar la posición suya en la orilla este en **(w, 0)**



Suponga:

- El río tiene **w** pies de ancho y que fluye a una velocidad constante de $\mathbf{v_r}$ pies/s.
- Usted nada a una velocidad de $\mathbf{v_s}$ pies/s con respecto al río y que su velocidad se dirige hacia donde están las canoeras.

Determinar: Valor de $\mathbf{v_s}$ para que haya una solución de **(w, 0)** a **(0,0)**

Localizado en el punto (x (t), y(t)) en el instante t, entonces su vector velocidad v en este punto es la suma de dos vectores $v = v_s + v_r$, que representan, a su vez, su velocidad y la dirección de nado (v_s) y la velocidad y la dirección del río (v_r). Debido a que su dirección de nado siempre se dirige hacia las canoas en (0,0) v_s tiene componentes en las direcciones x y y, mientras que la velocidad del rio v_r tiene sólo un componente ene la dirección y.

Como **dx/dt = v** en la dirección **x** y **dy/dt = v** en dirección **y**, se ve en la figura que

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = v_s + v_r = (-v_s\cos\theta, -v_s sen\theta) + (0, v_r) = (-v_s\cos\theta, v_r - v_s sen\theta) \qquad \textbf{(1)}$$

Donde: $|\mathbf{v_r}| = \mathbf{v_r}$ **y** $|\mathbf{v_s}| = \mathbf{v_s}$ son velocidades. Como los componentes de **(1)** son iguales y que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} : \rightarrow \frac{dx}{dt} = -v_s\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \frac{dy}{dt} = v_r - v_s\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Como: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, satisface la ecuación de 1er orden: $\frac{dy}{dx} = \frac{y - (v_r/v_s)\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ **(3)**

Determinar qué valores de $\mathbf{v_r/v_s}$ para alcanzar a las canoeras y evitar la pena de ser lanzado sobre las rocas.

Llevo a forma: $\frac{dy}{dx} + Py = Q \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{(v_r/v_s)\sqrt{x^2+y^2}}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(-\frac{y}{x}\right)}_{\left(\frac{-1}{x}\right)y} = -\frac{(v_r/v_s)\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

Identificamos entonces los valores de P y Q: $P = \frac{-1}{x}$; $Q = -\frac{(v_r/v_s)\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

Reemplazamos en: $\mathbf{y = e^{-\int P dx}[\int Q.\ e^{\int P dx}\ dx + c]}$ $\rightarrow y = e^{-\int -\frac{1}{x}.dx}\left[\int -\frac{(v_r/v_s)\sqrt{x^2+y^2}}{x}.e^{\int -\frac{1}{x}.dx}dx + c\right]$

Resolvemos las integrales: $y = e^{\ln x}\left[-(v_r/v_s)\int\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.e^{-\ln x}dx + c\right]$

Por propiedad de $e^{\ln x} = x$ → $y = x\left[-(v_r/v_s)\int \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.x.dx + c\right]$ $y = x\left[-(v_r/v_s)\int \sqrt{x^2+y^2}.dx + c\right]$

Resolvemos la integral: $y = x\left[-(v_r/v_s).\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{2}\ln x + \sqrt{x^2+y^2} + C\right)\right]$

Despejamos: $\frac{v_r}{v_s} = \frac{-y}{x\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{2}\ln x + \sqrt{x^2+y^2}\right)} + C$

Su amigo decide seguirlo y nadar a la orilla oeste. Considera que debe poder llegar a la orilla opuesta nadando directamente al oeste (en relación con el río) a una velocidad constante v_s. Confía en que puede nadar lo suficiente rápido para evitar ser arrastrado hacia los rápidos, tres millas corriente abajo desde el punto (1,0). Planea caminar hasta donde se ubican las aficionadas al canotaje cuando alcance la orilla.

La velocidad actual v_r de un río por lo común no es una constante. Además, una aproximación a la velocidad actual (medida en millas por hora) podría ser una función como $v_r = 30x(1-x)$, $0 \le x \le 1$, cuyos valores son más pequeños en las orillas (en este caso, x=0 y x=1) y máximos en la parte media del río. Suponga que su amigo comienza en (1,0) y que v_s=2mph

Resuelva la ED $\frac{dy}{dx} = -\frac{v_r}{v_s}$ con el valor de v_r ¿logrará cruzar el río o se hundirá en los rápidos?

Datos:

- ✓ $v_r = 30x(1-x)$
- ✓ $0 \le x \le 1$
- ✓ v_s=2mph

Reemplazamos los datos en la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{v_r}{v_s}$ → $\frac{dy}{dx} = -\frac{30x(1-x)}{2}$

Una ecuación diferencial de primer orden que puede ser llevada a la forma: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x}{h(y)} \Leftrightarrow h(y)dy = g(x)dx$

Para resolver ecuaciones separables se integra en ambos miembros. La solución, es una función implícita.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{30x(1-x)}{2} \rightarrow \quad dy = -\frac{30x(1-x)}{2}dx \;\rightarrow\; dy = \frac{-30x+30x^2}{2}dx \;\rightarrow\; dy = (15x^2 - 15x.)dx$$

Integro: $y = \int (15x^2 - 15x.)dx \rightarrow \; y = \frac{15x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} + C$ Reemplazo los valores x=0 y x=1

En **x=0:** y = 0

En **x=1:** $y = \frac{15.(1)^3}{3} - \frac{15.(1)^2}{2} \rightarrow \; y = 5 - 7{,}5 \rightarrow \; y = -2{,}5$

El amigo podrá entonces cruzar el río sin caer en los rápidos que se encuentran a 3 millas. Una vez cruzado el río, deberá caminar 2,5 millas para alcanzar a las aficionadas al canotaje.

APLICACIÓN: TRANSFERENCIA DE CALOR

El deshielo en los polos fue captado por satélites revelaron el rápido adelgazamiento que sufren sus capas de hielo; ocasionando porque:

a. El nivel de aguas aumentará 21 pies en la capital de USA.
b. No se contó con el efecto gravitatorio del hundimiento de la capa de hielo que provocará desplazamiento del eje de la tierra y más erosión costera.

Para calcular la temperatura terrestre dentro de 10 años se detecto que:

La temperatura media de la región: **T_m= -17 °C (T_m= 1,40°F)** y la más baja registrada en la estación antártica rusa de Vostok, el 21 de julio de 1983, cuando el termómetro marcó **- 89,3 °C**, la menor registrada de la superficie terrestre.

Eric Steig (Universidad de Washington, en 2009), demostró que el hielo, enviando señales de temperatura de **t = 0 °F** cuando la temperatura ambiente exterior era inferior a los **-50 °C** (**T = - 58 °F**), la temperatura aumenta a promedio de **1 grado cada 10** años, lo cual explica la presencia de lluvias y el fuerte deshielo actual de tal zona.

Datos:

- Temperatura media de la región **T_m: 1.40 °F**
- Temperatura en el exterior(**t = 0**°F): **T = - 58 °F**
- Al pasar 30 años(**t = 50**°F): **T = - 55 °F**
- Temperatura del hielo: 32°F

EDOL: Proceso	Desarrollo:
Llevo a la forma: • **y' + P y = Q**	Ley enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt}$ = k(T- T_m) $\frac{dT}{dt}$ = k (T - 1.4°F) → $\frac{dT}{dt}$ = k T - 1.4 °F.k → $\frac{dT}{dt}$ **- k T = - 1.4°F.k**
• Obtengo coefientes: **P** y **Q**	**P = -k** y **Q = - 1.4**°F.**k** Hago: **y = T** y **x = t**
• Reemplazo P y Q en: **$y = e^{-\int Pdx}[\int Q.\ e^{\int Pdx}\ dx + c]$**	**$T = e^{-\int -k.dt}[\int(-\ 1.4.k).\ e^{\int -k.dt}\ dt + c] = e^{k\int dt}[\int -\ 1.4.k.e^{-k\int dt}\ dt + c]$** **$T = e^{k.t}[\int -\ 1.4.k.e^{-k.t}\ dt + c] = e^{k.t}[1.4k\int -e^{-k.t}dt + c] = 1.4e^{k.t}.k\int -e^{-k.t}dt + ce^{k.t}$** **$T = ce^{k.t} + 1.4e^{k.t}.k\int -e^{-k.t}dt = ce^{k.t} + 1.4$** °F, Para: **t=0**°F y **T=58**°F → **c= -59.4** **T = -59.4**°F **$e^{k.t}$ + 1.4**°F, Para: **t = 50**°F y **T = -55**°F, La constante **K**: **-55** °F = **-59.4**°F **$e^{k.50}$ + 1.4**°F → **-59.4**°F **$e^{k.50}$ = 56.4**°F **$e^{k.50} = \frac{56.4°F}{59.4°F}$ = 0,94**, por logaritmo neperiano: **k50 = ln 0,94 = - 0,062** **k = - 1,54. 10^{-3}** , Sustituyo **k** en: **T = -59.4**°F **$e^{k.t}$ + 1.4**°F → **T = -59.4**°F **e** $^{-1.54*10^{-3}t}$ **+ 1.4**°F Temperatura en los próximos 10 años: **T = -59.4**°F **e** $^{-1.54*10^{-3}10}$ **+ 1.4**°F **T = -57.09**°F La temperatura aumenta por década en 1 grado aproximadamente, coincide así con las investigaciones realizadas.

Por separación de variables: $\frac{dT}{dt}$ **- k T =- 1.4°F.k** → $\frac{dT}{dt}$ **= k(T -1.4°F)** → $\frac{dT}{(T-1.40°F)}$ **= k.dt** → $\int \frac{dT}{(T-1.40°F)} = \int kdt$

ln(T- 1.4°F) = kt + C, aplico logaritmo Nepereano: **T – 1.4°F** = e $^{kt+c}$ → **T = ce ^{kt} +1.4°F**, reemplazo en **T = ce ^{kt} +1.4°F** , valor **t = 0**, y temperatura de (1979): **T = - 58 °F**→ **58°F = ce ^{k0} +1.4°F**→ **c = - 59.4**, reemplazo en **T = -59.4°F e ^{kt} +1.4°F**.

Cuando **t=50** es **T=-55°F**. El valor de **K**: **-55°F = -59.4°F e ^{k50} +1.4°F**→ **59.4°F e ^{k50} = 56.4°F**→ $e^{k50} = \frac{56.4°F}{59.4°F}$ → **e ^{k50} = 0,94**

Por logaritmo neperiano: **k50 = ln 0.94**→ **k50 = - 0.062**→ **k = -1.54* 10^{-3}** Sustituyo el valor de K en: **T = -59.4°F e ^{kt} +1.4°F**
T = -59.4°F e $^{-1.54*10^{-3}t}$ +1.4°F,Temperatura dentro de 10 años. **T = -59.4°F e $^{-1.54*10^{-3}10}$ +1.4°F =-57.09°F**→ **T = -57.09**°F

APLICACIÓN: CAIDA LIBRE DE CUERPOS

La caída libre de un cuerpo bajo la acción gravitacional, que excluye la influencia de otras fuerzas, como la resistencia aerodinámica; deben ser tenidas en cuenta cuando el fenómeno tiene lugar en el seno de algún fluido, como el aire.

La caída libre es un movimiento uniformemente acelerado (aceleración constante). Para caídas desde alturas de sólo unos pocos kilómetros o metros, la aceleración instantánea debida sólo a la gravedad es casi independiente de la masa del cuerpo, es decir, si dejamos caer un coche y una pulga, ambos cuerpos tendrán la misma aceleración, que coincide con la aceleración de la gravedad **g**.

Para calcular la distancia que recorre en segundos un objeto de masa que se deja caer desde un globo de aire caliente, suponiendo que la fuerza de fricción debida al aire es directamente proporcional a la velocidad del objeto.

Introducimos un eje vertical con la dirección positiva hacia abajo y el origen en el punto donde se deja caer el objeto, como observamos a continuación:
Se desea calcular la distancia **s (t)** del origen al objeto al tiempo **t**.
Velocidad del cuerpo: **v = s´(t)** y la aceleración: **a= dv/dt = s''(t)**

Si **g** es aceleración de la gravedad, el objeto es atraído hacia la tierra con una fuerza de magnitud **mg** .
Por hipótesis, la fuerza de fricción debida al aire es **kv** para una constante **k**, y su dirección es opuesta al movimiento. Resulta que la fuerza **F** hacia abajo sobre el objeto es **mg – kv**.

Por 2da ley del movimiento de Newton: **F = ma = m(dv/dt)**:
La ecuación diferencial: **m dv/dt = mg – kv** o equivalentemente: **dv/dt + k/m *v = g**
Si **c**: constante k/m, esta ecuación puede escribirse como: **y´ + P(x)y = Q(x)**

$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} V = G$ → $v' + \frac{1}{20} v = 9.8$: Ecuación de 1er orden, **t** variable independiente: $e^{\int c\, dt} = e^{ct}$ factor de integración.

Multiplicando por e^{ct} a esta ecuación: $e^{ct} * dv/dx + ce^{ct} v = ge^{ct}$ → $D_t (e^{ct}) = ge^{ct}$

Integrando: $ve^{ct} = g/c * e^{c} + K = v = g/c = K^{-ct}$ donde **K** es una constante

Si **t = 0**, entonces **v = 0**, luego: **0 = g/c + K** → **K = - g/c** Luego: $V = g/c - g/c * e^{ct}$

Integrando respecto a **t** y como: **v = s´(t)**, vemos que: $S(t) = g/c*t + g/c^2 * e^{-ct} + E$

La constante **E** considerando **t = 0**. Como **s(0) = 0**: $0 = 0 + g/c^2 + E$ o bien $E = - g/c^2$

La distancia que el objeto recorre el **t** segundos es: $S(t) = g/c*t + g/c^2 * e^{ct} - g/c^2$

Comparo: **s(t)** con la obtenida despreciando la fricción del aire, la ecuación diferencial **m(dv/dt) = mg – kv** se reduce a **dv/dt = g** , luego, **s´(t) = v = gt**. Integrando: $s(t) = ½ gt^2$, que es ecuación de 1º orden donde: **p(x)=1/20** y **Q(x)= 9.8** Reemplazo en la ecuación: **y = e-∫Pdx[∫Q. e∫Pdx dx + c]** para obtener **C**

$s(t) = e^{-\int \frac{1}{20}dt}\left[\int 9.8.e^{\int \frac{1}{20}dt} dt + C\right]$ → $\frac{1}{2}gt^2 = e^{-\frac{1}{20}\int dt}\left[\int 9.8.e^{\frac{1}{20}\int dt} dt + C\right]$ → $\frac{1}{2}gt = e^{-\frac{1}{20}t}\left[\int 9.8.e^{\frac{1}{20}t} dt + C\right]$

$\frac{1}{2}9.8(10)^2 = e^{-\frac{1}{20}t} * 9.8\frac{e^{-20t}}{-20} + C$ → $98 = e^{-\frac{1}{20}10} * 9.8\frac{e^{\frac{1}{20}10}}{20} + C$: 98 = 0,9.0.54+C → **C = 97.52**, Remplazo en la ecuación anterior, la ecuación de 1er orden: $s(t) = e^{-\frac{1}{20}t} * 9.8\frac{e^{\frac{1}{20}t}}{20} + 97.52$ → **s(t) = 98.01** Conclusión: El cuerpo de 20kg recorre una distancia de **98 m** en **10** segundos de su caída.

APLICACIÓN II: CAIDA LIBRE DE CUERPOS

Un meteorito, por gravedad terrestre, desde su reposo cae a la Tierra con movimiento rectilíneo desde una altura **h**. ¿Cuál será su velocidad al llegar a la superficie de la Tierra si despreciamos la acción de la atmósfera terrestre? (Radio de la Tierra: **R = 6377km** y **g = 9,81m/s**.)

Sea **x = x(t)** la distancia recorrida por el meteorito en su descenso, **h−x** la distancia del meteorito en el momento **t** hasta el centro de la Tierra. En instante **t** en el meteorito actúa la fuerza **F = m.a**, donde **m** masa del meteorito y **a** su aceleración. En la Tierra en el meteorito actúan la gravedad **P = mg**, donde **g** es la aceleración de caída libre en la superficie de la Tierra.

Según la ley de Newton, estas fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia del cuerpo en caída al centro de la Tierra, esto es

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2} \longrightarrow \frac{ma}{mg} = \frac{R^2}{(h-x)^2}$$

De donde: $a = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$ y como: $a = \frac{dv}{dt}$, entonces: $\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$

Por regla de la cadena: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ Reemplazando: $v\frac{dv}{dx} = \frac{gR^2}{(h-x)^2} \rightarrow \frac{dv^2}{dx} = \frac{2gR^2}{(h-x)^2}$

Integrando: $\int dv^2 = 2gR^2 \int \frac{dx}{(h-x)^2} \rightarrow \quad v^2 = \frac{2gR^2}{h-x} + C$

Si el movimiento empezó del reposo, tenemos las condiciones iniciales es decir, cuando **t = 0** $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, sustituyendo estos valores en la ecuación anterior. Resulta

$$0 = \frac{2gR^2}{h-0} + C \rightarrow C = -\frac{2gR^2}{h}$$

Sustituyendo el valor de **C** en la ecuación, obtenemos la variación de la velocidad **v** del meteorito respecto a la distancia recorrida x, ésta tiene la forma

$$v^2(x) = \frac{2gR^2 x}{h(h-x)}$$

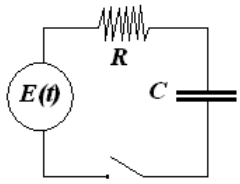
En la superficie de la Tierra (cuando **x = h − R**), la velocidad del meteorito es: $v = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{R}{h}\right)}$

Como **h** restringe poco, el límite cuando $h \to \infty$: $v = \sqrt{2gR} \rightarrow \quad x = \sqrt{2.9.8.6377000} \approx 11.2$ km/s

Conclusión: Cuando el meteorito llega a la superficie de la Tierra, este tiene una velocidad 11.2km/s.

APLICACIÓN: CIRCUITO RC DE CORRIENTE CONTINUA

Un circuito en serie de resistencia de **1**ohm y capacitor de **1/4** (microfaradios), es alimentado por una fuente de corriente continua de **10** volt. Calcular la corriente que circula en el circuito un instante de tiempo **t** = 1 segundos.



Datos: **E**$_{(t)}$=10v; **R** =1 ohm; **C** =1/4 Mf

Por la 2da **Ley de Kirchhoff**: **E**$_{(t)}$= IR+ $\left(\frac{1}{C}\right)q$ y como: **I** = $\frac{dq}{dt}$, la ecuación diferencial será: **E**$_{(t)}$= $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q$

Reemplazo: $\frac{1}{C}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{4\mu f}}=4\mu f$ Comparo **y'+4y = 10** con **y'+Py=Q** → **P=4, Q=10**, Aplico: **y = e$^{-\int Pdx}$[∫Q. e$^{\int Pdx}$ dx + c]**

$y(t)=e^{-\int 4dt}.\left[\int 10.e^{\int 4dt}.dx+c\right]$ → $y(t)=e^{-4t}.\left[10\int .e^{4t}.dx+c\right]$ → $y(t)=e^{-4t}.\left[10(\frac{e^{4t}}{4})+c\right]$

Reemplazo en **t=1:** $y(t)=e^{-4}.\left[10(\frac{e^{4}}{4})+c\right]$ → **y$_{(1)}$ = 2.5 A** Corriente en instante **t=1** segundo.

APLICACIÓN: CONCENTRACIÓN DE CONTAMINANTES

En cuántos años se reducirá la concentración de contaminantes al 0,02%, si un lago tiene un volumen de 500 Km^3, flujo de entrada y salida a razón de 100 Km^3 por año. Suponer que si **t** = 0 años, la contaminación tiene concentración de 0,05% y luego de un tiempo baja al 0,01%.

Datos:

- V = 500 Km^3 Volumen de lago
- .r$_o$ = r$_1$ = 100 Km^3 Flujo de carga y descarga del lago.
- .v$_t$ = ? Volumen de contaminantes en el instante t
- .v$_o$ = ? Volumen de contaminantes en el instante t = 0
- .v$_1$ = 0,01% Volumen de contaminantes luego el instante t = 0

Determinación de la ecuación diferencial:

- Volumen de contaminantes en el instante t = 0: v$_o$ = 0,0005 . 500 = 0, 25 Km^3
- Volumen de contaminantes en el instante t v$_t$ = 0,0002 . 500 = 0, 10 Km^3
- Cambio del volumen de contaminantes: Δv = v$_1$ r$_o$ Δt – $\frac{v}{500}$ r$_1$ Δt = (0,0001.100.- 0,2.x.) Δt

De la ecuación lineal de 1er orden: $\frac{dv}{dt}$ + 0,2 v = 0,01 de forma: **y'+Py=Q** resulta: **P = 0,**2 y **Q = 0,01**, que la resuelve: **y = e$^{-\int Pdx}$[∫Q. e$^{\int Pdx}$ dx + c]**

- Reemplazo en: $v=e^{-\int P.dt}.\left[\int Q.e^{\int P.dt}.dv+c\right]$ = $e^{-0,2\int .dt}.\left[0,01.\int e^{0,2\int .dt}.dv+c\right]$ = 0,0500 + C $e^{-0,2.t}$
- Sustituyendo: Volumen de contaminantes en el instante t

  v$_t$ = 0,0002 . 500 = 0, 10 Km^3, resulta: 0,10 = 0,0500 + C e$^{-0,2\,t}$;
  De donde: C = 0,10 – 0,05 = 0,05; así : v$_t$ = 0,0500 + 0,05 $e^{-0,2.t}$
- Luego: 0,10 = 0,05 + 0,05 e$^{-0,2\,t}$ de donde: **t =** $\frac{-1}{0,05}\ln\frac{0,10-0,05}{0,05}$ ≈ 20 años

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

El formato general de estas puede ser:

- Ecuación lineal no homogénea: $y^n + Ay^{n-1} + .. + Py'' + Qy' = F_{(x)}$ [1]
- Ecuación lineal homogénea ($F_{(x)} = 0$): $y^n + Ay^{n-1} + .. + Py'' + Qy' = 0$ [2]

Se resuelven transformandolas en ecuaciones lineales de orden uno, de forma **y'+ P.y = Q** cuya solución es la fórmula: $y = e^{-\int Pdx}[\int Q.\ e^{\int Pdx}\ dx + c]$. Para esto, usamos el siguiente proceso:

- Multiplicar ambos miembros de: $y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + ... + Py'' + Qy' = 0$ por **dx**
  $y^n\ dx + Ay^{n-1}\ dx + By^{n-2}\ dx + ... + Py''\ dx + Qy'\ dx = 0$
- Integrar ambos miembros: $\int y^n\ dx + A\int y^{n-1}\ dx + B\int y^{n-2}\ dx + .. + P\int y''\ dx + Q\int y'\ dx = 0$
- Este artificio $\int y''dx = \int \frac{d^2y}{d.x^2}dx = \int \frac{ddy}{dxdx}dx = \frac{dy}{dx} = y'$, baja un orden a la ecuación y genera una nueva constante de integración C_n. La solución general toma la forma: $y = C_1y_1 + C_2\ y_2 + .. + C_n\ y_n + \ldots$ [3]

  La ecuación primaria de orden **n**: $y^n\ dx + Ay^{n-1}\ dx + By^{n-2}\ dx + ... + Py''\ dx + Qy'\ dx = 0$, se transforma en otra de orden menor **n-1**: $y^{n-1} + Ay^{n-2}\ dx + By^{n-3}\ dx + ... + Py' + Qy = 0$
- Iterar este proceso tantas veces, hasta lograr una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma: **y'+P.y=Q**, cuya solución es: $y = e^{-\int Pdx}[\int Q.\ e^{\int Pdx}\ dx + c]$

CARACTERÍSTICAS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL:

- La variable dependiente "**y**" y todas sus derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$ son de 1er grado, cuando la potencia de cada término en que interviene "**y**" es 1.

  Las siguientes ecuaciones son diferenciales ordinarias de 1er, 2do y 3er orden:

  $(y - x)dx + 4xdy = 0$ $\quad y'' - 2y + y = 0$ $\quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$
- Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ de $y', y'', ..., y^{(n)}$ dependen sólo de la variable independiente **x**.
- Las funciones no lineales de la variable dependiente o sus derivadas, como $sen(y)$ o $e^{y'}$ no pueden aparecer en una ecuación lineal. Ejemplos: Ecuaciones diferenciales ordinarias de 1er, 2do y 4to orden:

  $(1 - y)y' + 2y = e^x$ $\downarrow$
  Término no lineal:
  El coeficiente depende de y

  $\frac{d^2y}{dx^2} + seny = 0$ $\downarrow$
  Término no lineal:
  Función no lineal de y

  $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$ $\downarrow$
  Término no lineal:
  Potencia diferente de 1

Para resolver ecuaciones LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Proceso	Ejemplo
1. Lleva a la forma de Ecuación lineal homogénea (**$F_{(x)}$= 0**): **$y^n + Ay^{n-1} +..+ Py'' + Qy' = 0$** luego, multiplica por: **dx**	Resolver: **$y.y'''' - y^2 + 2y = 0$**, multico por $\frac{1}{y}$ $y.y''''\frac{1}{y} - y^2\frac{1}{y} + 2y\frac{1}{y} = 0$ → **$y'''' - y + 2 = y''''dx - ydx + 2dx = 0$**
2. Integra ambos miembros	$\int y''''dx - \int y.dx + \int 2.dx = \int \frac{ddddy}{dx.dx.dx.dx}dx - y\int dx + 2\int dx = 0$ $\frac{dddy}{dx.dx.dx} - yx + 2x = 0$
3. Simplifica, iterando los pasos 1 y 2 hasta lograr una ecuación de orden 1 de la forma: **y' + Py = Q**	$\int \frac{dddy}{dx.dx.dx}dx - y\int x.dx + 2\int x.dx = 0$ → $\frac{ddy}{dx.dx} - y\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^2}{2} = 0$ $\int \frac{ddy}{dx.dx}dx - \frac{y}{2}\int x^2dx + \int x^2dx = 0$ $y' - y\frac{x^3}{6} = -\frac{x^3}{3}$
4. Identifica: **P** y **Q**	$P = \frac{-x^3}{6}$ $Q = -\frac{x^3}{3}$
5. Aplica la fórmula: **$y = e^{-\int Pdx}[\int Q.e^{\int Pdx}dx + c$**	$y = e^{-\int \frac{-x^3}{6}dx}\left[\int \frac{-x^3}{3}.e^{\int \frac{-x^3}{6}dx}dx + c\right]$ $y = e^{\frac{1}{6}\int x^3dx}\left[-\frac{1}{3}\int x^3.e^{-\frac{1}{6}\int x^3dx}dx + c\right]$ $y = e^{\frac{1}{6}\frac{x^4}{4}}\left[-\frac{1}{3}\int x^3.e^{-\frac{1}{6}\frac{x^4}{4}}dx + c\right] = e^{\frac{x^4}{24}}\left[-\frac{1}{3}\int x^3.e^{-\frac{x^4}{24}}dx + c\right]$ **Si:** $u = -\frac{x^4}{24}$ $du = -\frac{1}{6}x^3dx$ $y = e^{\frac{x^4}{24}}\left[\frac{1}{3}\int 6.e^{-u}du\right]$ $y = e^{\frac{x^4}{24}}\left[2\int .e^{-u}du\right] = y = e^{\frac{x^4}{24}} - 2e^u + c$ $y = e^{\frac{x^4}{24}} - 2e^{-\frac{x^4}{24}} + c$ $\underline{y = -e^{\frac{x^4}{24}} + c}$

Para resolver ecuaciones LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

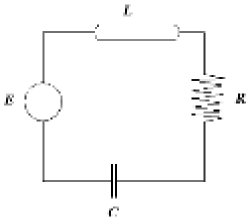
Proceso	Ejemplo
1.Multiplica la ecuación por: **dx**	Resolver: $y'' + 2y' - 4e^{2x} = 0$ $y''dx + 2y'dx - 4e^{2x}dx = 0$
2.Integra ambos miembros	$\int y''dx + 2\int y'dx - 4\int e^{2x}dx = 0$
Simplifica, iterando los pasos 1 y 2 hasta lograr una ecuación de orden 1 de la forma: **y' + Py = Q**	$\int \frac{ddy}{dxdx}dx + 2\int \frac{dy}{dx}dx - 4\int e^{2x}dx = 0$ $\frac{dy}{dx} + 2y - 4e^{2x} = 0$ → $y' + 2y - 4e^{2x} = 0$
Identifica: **P** y **Q**	P: 2 Q: $4e^{2x}$
Aplica la fórmula: **$y = e^{-\int Pdx}[\int Q.e^{\int Pdx}dx + c$**	**y =** $4\int e^{2x}dx + c.e^{-2x} = \frac{4e^{2x}}{2} + C$ = $2e^{2x} + C$

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR	
Proceso	Ejemplo
Multiplica la ecuación por: **dx**	Resolver: $y''+\frac{1}{x}y'-3+4=0$ $y''dx+\frac{1}{x}y'dx+1dx=0$
Integra ambos miembros	$\int y''dx+\int\frac{1}{x}y'dx+\int 1dx=0$
Simplifica hasta lograr una ecuación de orden 1 de la forma: **y' + Py = Q**	$\int\frac{ddy}{dxdx}dx+\int\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}dx+\int 1dx=0 \quad \frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}\right)y+x=0$ $y'+\left(\frac{1}{x}\right)y+x=0 \rightarrow y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=-x$
Identifica: **P** y **Q**	P: $\frac{1}{x}$ Q: $-x$
Aplica la fórmula: **y = e$^{-\int Pdx}$[$\int$Q.e$^{\int Pdx}$dx+c**	**y =** $e^{-\int\frac{x}{dx}}.\left[\int -x.e^{\int\frac{x}{dx}}.dx+c\right]=e^{-\ln\lvert x\rvert}.\left[\int -x.e^{\ln\lvert x\rvert}.dx+c\right]$ $y=\frac{1}{x}\left(\int -x.xdx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int -x^2dx+C\right)=-\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}+C$

Para resolver ecuaciones LINEALES DE ORDEN SUPERIOR	
Proceso	Ejemplo
Multiplica la ecuación por: **dx**	Resolver: $y''-y'+senx=0$ $y''dx-y'dx+senxdx=0$
Integra ambos miembros	$\int y''dx-\int y'dx+\int senxdx=\int\frac{ddy}{dxdx}dx-\int\frac{dy}{dx}dx+\int senxdx=0$
Simplifica, iterando los pasos 1 y 2 hasta lograr una ecuación de orden 1 de la forma: **y' + Py = Q**	$\frac{dy}{dx}-y-\cos x=0$
Identifica: **P** y **Q**	P= -1 Q= cos x
Aplica la fórmula: **y = e$^{-\int Pdx}$[$\int$Q.e$^{\int Pdx}$dx+c**	$y=e^{-\int(-1)dx}.\left[\int\cos x.e^{\int(-1)dx}.dx+c\right]=e^{x}\left(\int\cos xe^{-x}dx+c\right)$ $y=e^{x}\left(-\frac{1}{2}consxe^{-x}-\frac{1}{2}senxe^{-x}+c\right)=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}senx+c$

APLICACIÓN: CIRCUITOS RCL CONECTADOS EN SERIE

Un circuito serie tiene una fem **E = 100**sen(60t) **v**, un resistor **R=10 Ω**, un inductor **L= 0.1 h** y un capacitor C= **1/260 f**. Si la corriente inicial y la carga inicial del capacitor son cero, calcular la carga del capacitor en un instante: **t =1**segundo.



LA CAÍDA DE VOLTAJE: Está dada por:

- Inductor → Inductancia L: henrys (h)
  Caída de voltaje: L(di/dt)
- Resistor → Resistencia R: ohms (W)
  Caída de voltaje: iR
- Capacitor → Capacitancia C: farads (*f*)
  Caída de voltaje: (1/C)q

Por 2da Ley de Kirchhoff, la suma de las caída de voltaje es igual al voltaje E(t) suministrado al circuito, esto es:

$$L\left(\frac{di}{dt}\right)+IR+\left(\frac{1}{C}\right)q=E(t)$$

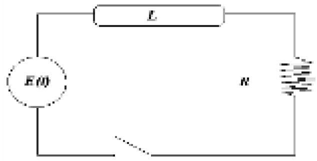
Como: $I=\frac{dq}{dt}$, la ecuación diferencial será:

$$L\frac{d^2q}{dt}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

Proceso	Desarrollo
1.Multiplico la ecuación por: **dt**	$0{,}1y''+10y'+260=100sen(60t)$ → $0{,}1y''+10y'+260-100sen(60t)=0$ $0{,}1y''dt+10y'dt+260dt-100sen(60t)dt=0$
2.Integro ambos miembros	$0{,}1\int\frac{ddy}{dtdt}dt+10\int\frac{dy}{dt}dt+260\int dt-100\int sen(60t)dt=0$ $0{,}1y'+10y+260t+100\cos(60t)=0$
Itero los pasos 1 y 2 hasta lograr una ecuación de orden 1 de forma: **y' + Py = Q**	Divido por 0,1: $y'+100y+2600t+1000\cos(60t)=0$ **y'+100y = [-2600t - 100cos(60t)]** ecuación quede de forma: **y' + Py = Q**
Identifico: **P** y **Q**	**P** = **100** **Q** = **[-2600t - 100cos(60t)]**
Aplico la fórmula: **y = e$^{-\int Pdx}$[∫Q.e$^{\int Pdx}$dx+c**	$y=e^{-100\int dt}\left[\int(-2600t-1000\cos(60t)).e^{100\int dt}.dt+c\right]=e^{-100t}.\left[\int(-2600t-1000\cos(60t)).e^{100t}.dt+c\right]$ $y=e^{-100t}\left[\left[-2600\int t.e^{100t}dt\right]-\left[1000\int\cos(60t).e^{100t}dt\right]+C\right]$ $y=e^{-100t}.\left[\left[-2600\left[\frac{t.e^{100t}}{20}-\frac{1}{20}\int e^{100t}dt\right]\right]-\left[1000\left[\frac{e^{100t}(60sen(60t)+20\cos(60t))}{20^2+60^2}\right]\right]\right]$ $y=e^{-100t}.\left[\left[-2600\left[\frac{t.e^{100t}}{20}-\frac{e^{100t}}{20}\right]\right]-\left[1000\left[\frac{e^{100t}(60sen(60t)+20\cos(60t))}{4000}\right]\right]+C\right]$ Para t=1: $y=e^{-100}.\left[\left[-2600\left[\frac{e^{100}}{20}-\frac{e^{100}}{20}\right]\right]-\left[1000\left[\frac{e^{100}(60sen(60)+20\cos(60))}{4000}\right]\right]\right]$ $y=e^{-100}.\left[-1000\left[\frac{e^{100}(60sen(60)+20\cos(60))}{4000}\right]\right]$ $y=e^{-100}.\left[-1000\left[\frac{e^{100}(51{,}96+10)}{4000}\right]\right]$ $y=e^{-100}.\left[-1000\left[\frac{e^{100}(61.96)}{4000}\right]\right]$ → $y=e^{-100}.[-1000[6{,}85x10^{31}]]$ $y=e^{-100}.[-6{,}85x10^{34}]$ → $\boxed{y=-3.4x10^{-9}}$ Carga del capacitor en el instante: **t=1**

APLICACIÓN: CIRCUITOS RCL en SERIE

Un circuito de resistencia de **R=100** Ω(ohm) y una bobina de **L=1** henrio, es alimentado por una fuente de corriente continua(sin oscilación) de **E=30** volts. Calcular la corriente q circula por el circuito en el instante de tiempo **t=2** seg.

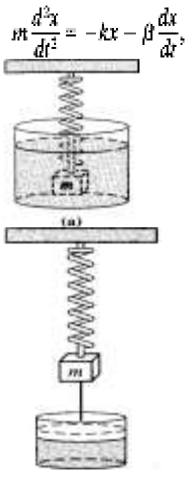


Por Kirchhoff: $L\left(\frac{di}{dt}\right)+IR=E(t)$; y como: $I=\frac{dq}{dt}$ → $E_{(t)}=L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}$

Proceso	Desarrollo
Llevo a forma: $y^n+Ay^{n-1}+..+Py''+Qy'=0$ **1.** Multiplica la ecuación por: **dx**	$E_{(t)}=L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}\rightarrow 30=1\frac{d^2q}{dt^2}+100\frac{dq}{dt}\rightarrow$ $y''+100y'-30=0$ $y''dt+100y'dt-30dt=0$
2. Integra ambos miembros	$\int\frac{ddy}{dtdt}dt+100\int\frac{dy}{dt}dt-30\int dt=0\quad \frac{dy}{dx}+100y-30t=0$
Simplifica, iterando los pasos **1** y **2** hasta lograr: **y' + Py = Q**	**y' + 100y = 30t**
Identifica: **P** y **Q**	**P** = 100 **Q** = 30t
Aplica la fórmula: $y=e^{-\int Pdx}[\int Q.e^{\int Pdx}dx+c]$	$y(t)=e^{-\int 100dt}\left[\int 30.e^{\int 100dt}.dx+c\right]=e^{-100\int dt}\left[30\int .e^{100\int dt}.dx+c\right]$ $y(t)=e^{-100t}.\left[30\int .e^{100t}.dx+c\right]=e^{-100t}.\left[30(\frac{e^{100t}}{100})+c\right]$ Reemplazo en t=2: $y_{(2)}=e^{-200}.\left[30(\frac{e^{200}}{100})+c\right]=1{,}38E-87.[2{,}16E86]$ $y_{(2)}$ **= 0,29808 A** Corriente en el instante de tiempo **t=2**

APLICACIÓN: MOVIMIENTO AMORTIGUADO LIBRE

La fuerza de amortiguación que actúan en un cuerpo es proporcional a una potencia de la velocidad instantánea. La fuerza es múltiplo constante de **dr/dt**.
Sin otras fuerzas externas sobre el sistema, se sigue la 2da ley de Newton, donde **β** es la constante de amortiguamiento positiva con signo negativo por que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta a la del movimiento.
Al dividir la ecuación por la masa **m**, la ecuación del movimiento es



$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

Llamo: $2\lambda=\frac{\beta}{m}$ y $\omega^2=\frac{k}{m}$ → $\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$

Multiplico por **dt** e integro: $\int\frac{ddx}{dtdt}dt+2\lambda\int\frac{dx}{dt}dt+\omega^2x\int dt=0$

$$x'+2\lambda x+\omega^2xt=0\rightarrow x'+x(2\lambda+\omega^2t)=0$$

$$\frac{x'}{x}=-(2\lambda+\omega^2t)\rightarrow \ln|x|=-2\lambda t-\frac{\omega^2t^2}{2}\rightarrow x=ce^{-2\lambda t-\frac{\omega^2t^2}{2}}$$

APLICACIÓN: Resorte II

Un peso de 3kg estira 153mm cierto resorte. Si se tira del peso hasta 10cm por debajo de su posición de equilibrio y luego se suelta:

a) Establecer la ecuación diferencial y las condiciones asociadas que describan el movimiento.
b) Hallar la posición del peso en función del tiempo.
c) Determinar la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.
d) Calcular la posición, velocidad y aceleración del peso (1/2) seg después de haberlo soltado.

Por Hooke $|f| = k|x|$: 3= k.0,153→ k= 19,6 Ecuación del movimiento: $\frac{3}{9,8} * \frac{d^2x}{dt^2} = -19,6x$ → $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$ (5)

Para **t =0** el peso está 10cm debajo de la posición de equilibrio, la condición x= 0,10 m (6)

Como el peso se suelta (es decir, su velocidad es nula) cuando **t =0:** $\frac{dx}{dt}$ **=0** (7)

La ecuación auxiliar de (5) es: $m^2 + 64 = 0$, cuyas raíces son: $m = \pm 8i$, luego, la solución de la ecuación es: $x = A\cos 8t + sen 8t$ (8) De (6): A =0,10, de modo que: $x = 0{,}10\cos 8t + Bsen 8t$

Derivando: $\frac{dx}{dt} = -0{,}8sen 8t + 8B\cos 8t$ → Con (7): 0=-0,8Sen 8. 0 + 8BCos8.0 → B=0

La solución es: $x = 0{,}10\cos 8t$ (9) La amplitud es 0,10m.

Frecuencia **f**: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}306}} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ ciclos por segundo

Periodo: $T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{4} seg$ Derivando: x=0,10cos8t: $v = \frac{dx}{dt} = -8 * 0{,}10 sen 8t \rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -64 * 0{,}10\cos 8t$

Para t =1/2: x= 0,10(-0,656) = -0,0656 → v=-0,8.0,10(-0,755)=0,604 → a= -64. 0,10(-0,656)=4,2

Así: ½ **seg** después de haber soltado el peso, este se halla **0,0656 m** por encima de la posición de equilibrio, descendiendo con una velocidad de **0,604 m/seg** y una aceleración de **4,2 m/seg** ^{2}

Ecuación de orden superior, que describe el movimiento del resorte: $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$

Multiplico por dt: $x''dt + 64xdt = 0$ Integro: $\int x''dt + \int 64xdt = 0$ Reemplazo $x'' = \frac{ddx}{dtdt}$

$\int \frac{ddx}{dtdt}dt + \int 64xdt = 0$ → $\frac{dx}{dt} + 64xt = 0$ → $x' + 64xt = 0$, ecuación diferencial de orden 1.

Comparando con: $x' + P(t)x = Q(t)$ → P(t) = 64 t Q(t)=0

Reemplazo en: **y = e$^{-\int Pdx}$[∫Q. e$^{\int Pdx}$ dx + c]** → $x(t) = e^{-\int 64tdt}\left[\int 0e^{\int 64tdt}dt + C\right] = e^{-\frac{64}{2}t^2} + C$

$x(t) = e^{-32t^2} + C$, por condiciones de contorno: C: x = 0.1 m t = 0

$0{,}10 = e^{-32*0} + C$ → 0,10 = 1 + C → -0.9 = C

Ecuación diferencial del problema: $x = e^{-32t^2} - 0.9$, de la 1ra y 2da logro velocidad y aceleración:

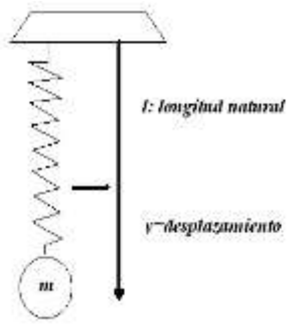
$\frac{dx}{dt} = v = e^{-32t^2} * (-64t)$ → $\frac{d^2x}{dt^2} = a = -64e^{-32t^2} - 64te^{-32t^2}(-64t) = 64e^{-32t^2}(-1 + 64t^2)$

La posición, velocidad y aceleración para **t=0.5**seg:

x =e$^{-32.0,25}$ -0,9=**-0,89**m → **v** =-0,64.0,5**e$^{-32\ .0,25}$**=**-0,64** m/seg → **a** = 64 **e$^{-32\ .0,25}$** (1- 64. 0,25)= **0,32** m/seg.

APLICACIÓN: MOVIMIENTO NO AMORTIGUADO DE UN MUELLE

Un peso de 4 libras estira un muelle, desde su posición natural, en 8 pulgadas.
Si se estira el muelle hacia abajo otras 6 pulgadas y se suelta con una velocidad inicial hacia arribe de 8 pies por segundo, hallar la fórmula para la posición del peso en función del tiempo t y la posición y para un tiempo de 3 segundos.



Datos:

L: longitud natural
Y: desplazamiento
Peso (W)= 4 libras
Posición natural = 8 pulgadas
Se estira = 6 pulgadas
Velocidad inicial = 8 pies/segundo
Tiempo = 3 segundos
G = 32 pies/segundo

Por la ley de Hooke, un muelle que se extiende (o se comprime), las unidades de su longitud natural 1 tiende a volver por si mismo a su longitud natural, mediante una fuerza F que es proporcional a y. Esto es; $F(y) = -ky$ donde k es la **consonante del muelle** que indica la rigidez de un muelle dado.

F es proporcional a y → por tanto $F(y) = -ky$

Peso del objeto W = m*g

Segunda ley de Newton→ $F = ma$; donde $a = \dfrac{d^{2y}}{dt^2}$ es la aceleración.

Si el movimiento no es amortiguado, su ecuación es: $m\left(\dfrac{d^2y}{dy}\right) = -ky$ → $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \left(\dfrac{k}{m}\right)y = 0$

Por Hooke: $4 = k\left(\dfrac{2}{3}\right)$; k=6. El peso W viene dado por mg: $m = \dfrac{w}{g} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

La ecuación del movimiento no amortiguado es: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 48y = 0$

Como la ecuación: $m^2 + 48 = 0$ tiene raíces complejas $m = 0 \pm 4\sqrt{3i}$, la solución general es:

$y = C_1e^0 \cos 4\sqrt{3t} + C_2e^0 sen 4\sqrt{3t} = C_1 \cos 4\sqrt{3t} + C_2 sen 4\sqrt{3t}$

Usando las condiciones iniciales, tenemos: $\dfrac{1}{2} = C_1(1) + C_2(0) \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad y(0) = \dfrac{1}{2}$

$y'(t) = -4\sqrt{3}C_1 sen 4\sqrt{3}t + 4\sqrt{3}C_2 \cos 4\sqrt{3}t$ → $8 = -4\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)(0) + 4\sqrt{3}C_2(1) \Rightarrow C_2 \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad y'(0) = 8$

La posición es un tiempo t viene dada por: $y = \dfrac{1}{2}\cos 4\sqrt{3}t + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} sen 4\sqrt{3}t$

En 3 segundos: $y = \dfrac{1}{2}\cos 4\sqrt{3}(3) + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} sen 4\sqrt{3}(3)$ .y = 2.59 +0.418 = 3.008 pulgadas = 3 pulgadas

ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA:

Una ecuación diferencial lineal de orden **n** de la forma:

- $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$: Es **homogénea**

  Ejemplo: $2y''+3y'-5y=0$: Ecuación diferencial lineal homogénea de 2do orden

- $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$: Con $g(x)\neq 0$: Es **no homogénea.**

  Ejemplo: $x^3y'''+6y'+10y=e^x$: Ecuación diferencial lineal no homogenea de 3er orden.

TEOREMA: **PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:**

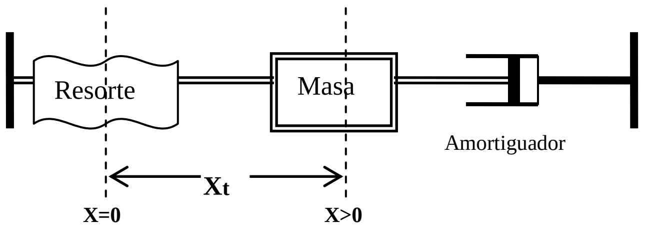
Sean $y_1, y_2,..., y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal: $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ky_k(x)$ [0],donde $c_i, i=1,2,...,k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Ejemplo: Las funciones $y_1=x^2$ **[I]** y $y_2=x^2\ln x$ **[II]** son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y'''-2xy'+4y=0$ en el intervalo $(0,\infty)$.

Por principio de superposición la combinación lineal: $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ky_k(x)$ **[0]**

Reemplazo **[I]** y **[II]** en **[0]** Solución de la ecuación en el intervalo: $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$.

APLICACIÓN: **VIBRACIONES LIBRES DE UNA MASA**



Una masa sujeta en sus extremos a un resorte y un amortiguador:

- **Fs = -k.x** Fuerza del resorte sobre la masa
- **Fr = -c.v** Fuerza de restitución del amortiguador sobre la masa, proporcional al desplazamiento **x**. y a velocidad **v**.
- Por Newton: **F = m.a → m.x'' = Fs + Fr**

Luego: $\mathbf{m}.\dfrac{d^2x}{dt^2}+\mathbf{c}\dfrac{dx}{dt}+\mathbf{k.x}=\mathbf{0}$: Ecuación lineal homogénea de 2do orden de las vibraciones libres de la masa **m.**

DEFINICIÓN: **DEPENDENCIA LINEAL**

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ en un intervalo I, es:

- **Linealmente dependiente:** Si existen constantes $c_1, c_2,..., c_n$, no todas cero, tal que $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+...+c_nf_n(x)=0$, para toda x.

  Ejemplo: Las funciones $f_1(x)=\cos^2 x, f_2(x)=sen^2x, f_3(x)=\sec^2 x, f_4(x)=\tan^2 x$ son lineal dependientes en el intervalo $\left(\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ porque existen constantes $c_1, c_2,..., c_n$, no todas cero, tales que

  - $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+...+c_nf_n(x)=0$, para toda x.
  - $c_1\cos^2 x+c_2sen^2x+c_3\sec^2 x+c_4\tan^2 x=0$

  Donde: $c_1=c_2=1, c_3=-1, c_4=1$. Aquí se usó $\cos^2 x+sen^2x=1$ y $1+\tan^2 x=\sec^2$.

- **Linealmente independiente** Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente**.**

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES Y DE VALORES EN LA FRONTERA:

Para una ecuación diferencial lineal, un problema de valor inicial de n-ésimo orden es

- Resuelva: $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$
- Sujeta a: $y(x_0)=y_0 \qquad y'(x_0)=y_1,..., \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$

Se busca una función definida en algún intervalo I, que contiene a x_0, que satisface la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales que se especifican.

TEOREMA: **EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN ÚNICA**

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x),..., a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x)\neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x=x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces $y(x)$ del problema de valor inicial existe en el intervalo y es única.

Ejemplo: El problema de valor inicial

$3y'''+5y''-y'+7y=0 \qquad y(1)=0, \qquad y'(1)=0, \qquad y''(1)=0$

Posee la solución trivial $y=0.$ Debido a que la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, es decir, se deduce que se satisfacen las condiciones del Teorema. Por consiguiente, $y=0$ es la única solución en cualquier intervalo que contiene a x=1.

Ejemplo: Comprobar que la función $y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ es una solución del problema de valor inicial

$y''-4y=12x, \qquad y(0)=4, \qquad y'(0)=1$

Ahora la ecuación diferencial es lineal, los coeficientes, así como $g(x)=12x,$ son continuos, $a_2(x)=1\neq 0$ en algún intervalo I que contiene a $x=0.$ Se concluye del Teorema que la función que se provee es la única solución en I.

ECUACIONES LINEALES en SERIE DE POTENCIAS

DEFINICIÓN: La serie de potencias en **(x - a)**, centrada en **a**, tiene la forma:

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_o (x-a)^o + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \ldots + c_n (x-a)^n$$

PROPIEDADES DE LAS SERIES DE POTENCIAS:

1. **CONVERGENCIA**: La serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ converge en un valor de **x** si su sucesión de sumas parciales $\{S_N(x)\}$ converge, si existe: $\mathrm{Lim}_{N\text{-}oo} S_N(x) = \mathrm{Lim}_{N\text{-}oo} \sum_{n=0}^{N} C_n (x-a)^n$. Si el límite no existe en **x**, la serie es divergente

2. **INTERVALO DE CONVERGENCIA**: Toda serie de potencia tiene intervalo de convergencia dado por el conjunto de números reales **x** para los que la serie converge.

3. **RADIO DE CONVERGENCIA**: La serie de potencias tiene un radio de convergencia **R**. Si **R>0**, entonces la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ converge para: $|x-a|<R$ y diverge para: $|x-a|>R$. Si la serie sólo converge en su centro **a**, entonces **R=0**. Si la serie converge para toda **x**, entonces se escribe $R = \infty$.

   TEOREMA: RADIO DE CONVERGENCIA ρ:

   Dada la serie de potencias: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, si el límite $\rho = \text{Lím} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ existe, entonces:

   - Si $\rho = 0$, la serie diverge para toda $x \neq 0$.
   - Si $0 < \rho < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ converge si: $|x| < \rho$ y diverge si $|x| > \rho$
   - Si $\rho = \infty$, la serie converge para toda **x**.

4. **CONVERGENCIA ABSOLUTA**: Si **x** es número del intervalo de convergencia y no del extremo del intervalo, entonces la serie de valores absolutos $\sum c_n|(x-a)^n|$ converge.

5. **LA SERIE de POTENCIAS DEFINE la FUNCIÓN**: $f_{(x)} = \sum c_n(x-a)^n$ Su dominio es el intervalo de convergencia. Si $y = \sum c_n.x^n$, es serie de potencias en **x**, las 1ras dos derivadas son $y' = \sum c_n.nx^{n-1}$ y $y'' = \sum c_n.n(n-1)x^{n-2}$

   TEOREMA 1: DIFERENCIACIÓN TERMINO a TERMINO de SERIES DE POTENCIAS
   Para poner todo en función de x_n cambiamos el índice, así comparamos los coeficientes, de modo que, al reducir en **k** el índice bajo el sumatorio, debo aumentarlo en **k** dentro del sumatorio.

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{La 1ra derivada:} \quad y' = \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1}$$

Desarrollo: $\sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} =$

$$= 1.a_1x^0 + 2.a_2x^1 + 3.a_3x^2 + 4.a_4x^3 + .. \text{[I]}$$

- Para n=1 → $na_nx^{n-1} = 1a_1x^{1-1} = 1a_1x^0$
- Para n=2 → $na_nx^{n-1} = 2a_2x^{2-1} = 2a_2x^1$
- Para n=3 → $na_nx^{n-1} = 3a_3x^{3-1} = 3a_3x^2$
- Para n=4 → $na_nx^{n-1} = 4a_4x^{4-1} = 4a_4x^3$

Desarrollo: $\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n =$

$$= 1.a_1x^0 + 2.a_2x^1 + 3.a_3x^2 + 4.a_4x^3 + .. \text{[II]}$$

- Para n=0 → $(n+1)a_{n+1}x^n = (0+1)a_{0+1}x^0 = 1a_1x^0$
- Para n=1 → $(n+1)a_{n+1}x^n = (1+1)a_{1+1}x^1 = 2a_2x^1$
- Para n=2 → $(n+1)a_{n+1}x^n = (2+1)a_{2+1}x^2 = 3a_3x^2$
- Para n=3 → $(n+1)a_{n+1}x^n = (3+1)a_{3+1}x^3 = 4a_4x^3$

Como [I]= [II]: $y' = \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \rightarrow y'' = \sum_{2}^{\infty} (n-1)n.a_n x^{n-2} = \sum_{0}^{\infty} (n+1)(n+2).a_{n+2}x^n$

Ej: Diferenciando: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + .. = \frac{1}{1-x} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$

6. **PROPIEDAD DE IDENTIDAD**: Si $\sum c_n(x-a)^n = 0$, **R>0** para los números **x** en el intervalo de convergencia, entonces $c_n = 0$, para toda **n**.

TEOREMA 2: **PRINCIPIO DE IDENTIDAD:** Si dos series de potencias representan la misma función, son iguales.

Luego, si: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Para todo punto **x** en intervalo abierto **I**, entonces $a_n = b_n$ para toda: $n \geq 0$

Ejemplo: $y' = y$, Donde: $y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ La 1ra derivada: $y' = \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1}$

Reemplazo en: $y' = y \rightarrow \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} - \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 0$ **[0]**

Desarrollo: $\sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} =$

$= 1.a_1 x^0 + 2.a_2 x^1 + 3.a_3 x^2 + 4.a_4 x^3 + \ldots$ **[I]**

- Para n=1 $\rightarrow n a_n x^{n-1} = 1a_1 x^{1-1} = 1a_1 x^0$
- Para n=2 $\rightarrow n a_n x^{n-1} = 2a_2 x^{2-1} = 2a_2 x^1$
- Para n=3 $\rightarrow n a_n x^{n-1} = 3a_3 x^{3-1} = 3a_3 x^2$
- Para n=4 $\rightarrow n a_n x^{n-1} = 4a_4 x^{4-1} = 4a_4 x^3$

Por otra parte, desarrollo: $\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n =$

$= 1.a_1 x^0 + 2.a_2 x^1 + 3.a_3 x^2 + 4.a_4 x^3 + \ldots$ **[II]**

- Para n=0 $\rightarrow (n+1)a_{n+1} x^n = (0+1)a_{0+1} x^0 = 1a_1 x^0$
- Para n=1 $\rightarrow (n+1)a_{n+1} x^n = (1+1)a_{1+1} x^1 = 2a_2 x^1$
- Para n=2 $\rightarrow (n+1)a_{n+1} x^n = (2+1)a_{2+1} x^2 = 3a_3 x^2$
- Para n=3 $\rightarrow (n+1)a_{n+1} x^n = (3+1)a_{3+1} x^3 = 4a_4 x^3$

Reemplazando **[II]** en **[0]** : $\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 0 \rightarrow \sum_{0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - a_n] x^n = 0$

O sea: $[(n+1)a_{n+1} - a_n] = 0$, de donde resulta la **FORMULA DE RECURRENCIA**: $a_{n+1} = a_n / (n+1)$

A partir de la fórmula de recurrencia, calculamos a_1, a_2, a_3 ... en términos de a_0, esta es la constante arbitraria de la solución de una ecuación diferencial de primer orden, usada como parámetro.

- Para n=0: $a_{0+1} = a_0 /(0+1) = a_0 /1 \rightarrow a_1 = a_0 /1!$
- Para n=1: $a_{1+1} = a_1 /(1+1) = a_0 /2 \rightarrow a_2 = a_0 /2!$
- Para n=2: $a_{2+1} = a_2 /(2+1) = a_0 /6 \rightarrow a_3 = a_0 /3!$
- **Para n=n**: $a_{n+1} = a_2 /(n+1) = a_0 /n! \rightarrow a_n = a_0 /n!$ **[III]**

7. **ARITMÉTICA en SERIE DE POTENCIAS**: Combina operaciones de suma, multiplicación y división.

Como la serie de potencias converge para $|x| < \infty$, la serie de productos convergen en el mismo intervalo.

Las series de potencias, algebraicamente se operan en forma similar a la operación de polinomios.

Por ello, si: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (12)

Entonces:

- **Adición**: $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ (13)
- **Multiplicación:** $f(x).g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 +$ (14) Multiplicar cada término de la primera serie por cada término de la segunda y después reducir coeficientes de términos semejantes en x.

Ejemplo: De la tabla anterior, para toda x: $sen x \cos x = (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots)(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots)$

$$= x + (-\frac{1}{6} - \frac{1}{2})x^3 + (\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120})x^5 + .. = x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 - \cdots = \frac{1}{2}\left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots\right] = \frac{1}{2} sen 2x$$

- **Cociente**: De dos series de potencias puede calcularse aplicando el algoritmo de división de la serie de Taylor para **cos x** entre **sen x** produce la serie cuyos primeros términos son: $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \cdots (15)$

  La división de series de potencias es más compleja que la multiplicación, así, la serie **f / g**, puede perder la convergencia en puntos en donde las series **f** y **g** convergen. Así, las series del seno y el coseno convergen para toda x, mientras que la serie de la tangente dada en la fórmula (15) converge solo cuando **|x| < 1/ 2**.

SERIES TÍPICAS DE POTENCIAS

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ si } |x|<1 \qquad (3)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots; \qquad (4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (5)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \qquad (6)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots; \qquad (7)$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots; \qquad (8)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (9)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + (11)$$

Las series:
(4) - (8) convergen a las funciones indicadas para toda x
(9) - (10) convergen solo para |x| < 1, y divergen para |x| > 1.
(10) donde α es un n° real arbitrario es la serie binominal.
(3), es la serie geométrica.

8. **ANALÍTICA EN UN PUNTO**: Una función **f** es analítica en un punto **a** si se puede representar mediante una serie de potencias **x - a** con radio positivo o infinito de convergencia.

Ejemplo: La función **f(x) = cos x** puede representarse mediante series de Taylor.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(h).(x-h)^n}{n.!} = f_{(h)} + \frac{f'(h).(x-h)^1}{1.!} + \frac{f''(h).(x-h)^2}{2.!} + \frac{f'''(h).(x-h)^3}{3.!} + \ldots + \frac{f^n(h).(x-h)^n}{n.!}$$

Para: **h = 0**, toma el formato de la serie **MacLaurin** la cual, para $f_{(x)}$ **= Cos x**

Reemplazo cada valor: $\frac{f^n(o).x^n}{n.!}$ en la formula de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(o).x^n}{n.!} = f_{(0)} + \frac{f'(o).x^1}{1.!} + \frac{f''(o).x^2}{2.!} + \frac{f'''(o).x^3}{3.!} \ldots + \frac{f^n(o).x^n}{n.!}$$

$f_{(x)}$ = Cos x → $f_{(0)}$ = Cos 0 = 1
$f'_{(x)}$ = Sen x → $f'_{(0)}$ = Sen 0 = 0
$f''_{(x)}$ = -Cos x → $f''_{(0)}$ = -Cos 0 = -1
$f'''_{(x)}$ = Sen x → $f'''_{(0)}$ = Sen 0 = 0

$$f_{(x)} = \frac{0x^0}{0!} + \frac{1x^1}{1!} + \frac{0x^2}{2!} - \frac{1x^3}{3!} + \frac{0x^4}{4!} + \frac{1x^5}{5!} + \frac{0x^6}{6!} - \frac{1x^7}{7!} + \frac{0x^8}{8!}$$

Serie de MacLaurin

$$f_{(x)} = \operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} +$$

Por tanto: $f_{(x)} = \operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ muestra que: **f(x) = cos x** es analítica en **x = 0**.

9. **PUNTO SINGULAR $x_{(0)}$**:
Si divido entre el coeficiente **a_2(x)** la ecuación lineal de 2do orden: **$a_2(x)y'' + a_1y' + a_0y = 0$** [I]
adopta la forma estándar: **$y'' + P_{(x)}\, y' + Q_{(x)}\, y = 0$** [II]

- Un punto x_0 es **punto ordinario** de [I], si $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ de la forma [II] son analíticas en x_0.
- Un punto no ordinario es un **punto singular** de tal ecuación.
- Un punto singular $x_{(0)}$ de [I] se clasifica como **regular** o **irregular**, según sean las funciones **P** y **Q** en la forma estándar: [II]

Ejemplo: Los puntos **x=2** y **x=-2**, son singulares de: $(x^2-4)^2y''+3(x-2)y'+5y=0$. Divido en: $(x^2-4)^2=(x^2-2)^2(x^2+2)^2$ y reducir los coeficientes a términos mínimos: $P_{(x)}= 3 / [(x-2)^2(x+2)^2]$ y que: $Q_{(x)}= 5 / [(x-2)^2(x+2)^2]$

Prueba que $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ en cada punto singular: Para que **x=2** sea un punto singular regular, el factor **x-2** puede aparecer a lo sumo a la 1ra potencia en el denominador de $P_{(x)}$ y a lo sumo a la 2da potencia en el denominador de $Q_{(x)}$. En los denominadores de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, si ambas condiciones se satisfacen, luego **x=2**, es un punto singular regular.

10. **PUNTO SINGULAR REGULAR $x_{(0)}$**: De la ecuación $a_2(x)y''+ a_1y'+ a_0y = 0$ si la función $p_{(x)}=(x- x_0)P_{(x)}$ y la función $q_{(x)}=(x- x_0)^2Q_{(x)}$ son analíticas en x_0. Un punto singular no regular es **punto singular irregular**.

11. **COEFICIENTES POLINOMIALES:** En $p_{(x)}=(x- x_0)P_{(x)}$ y la función $q_{(x)}=(x-x_0)^2Q_{(x)}$, se llega a la conclusión que al multiplicar $P_{(x)}$ por $x-x_0$ y $Q_{(x)}$ por $(x-x_0)^2$ tienen el efecto de que $x-x_0$ ya no aparezca en los denominadores, luego la ecuación original se puede escribir como: $(x^2- x_0)^2y''+(x- x_0)\, p_{(x)}y'+ q_{(x)}y=0$, donde **p** y **q** son analíticos en $x- x_0$.

Si: $a_2(x)y''+ a_1(x)y'+ a_0(x)y = 0$ tiene coeficientes polinomiales, si el polinomio analítico es un valor **x**, y una función racional es analítica excepto en los puntos donde su denominador es cero.

Ejemplo: $x.y'' + y' + xy = 0$ (3), los coeficientes **A=x, B=1, C=x** son funciones analíticas de **x**.

Dividiendo en A y haciendo: $P = \frac{1}{x}$ y $Q = \frac{x}{x}$, (3) → $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ (4).

Si las funciones P (x) y Q (x), en el punto x = a, son:

- **Analíticas**: El punto x = a es un **punto ordinario** de la ecuación (2)
  Así: **x = 0**: es punto ordinario de $xy'' + (\operatorname{sen}x)y' + x^2y = 0$; aunque A (x) = x se anula en x = 0.
  En x = 0 porque la división entre x da una serie de potencias convergente

- **No analíticas**: El punto x = 0 es un **punto singular**. El punto singular de las ecuaciones (3) y (4) es x = 0

TEOREMA: **EXISTENCIA DE SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS**:
Si $x = x_0$ es punto ordinario de: $a_2(x)y''+ a_1(x)y'+ a_0(x)y = 0$ siempre es posible hallar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias centrada en x_0, es decir: $y =\sum c_n(x-a)^n$
La solución converge al menos en un intervalo definido por $|x-x_0|<R$, donde **R** es la distancia desde x_0 al punto singular más próximo.

Ejemplo: Resolver por serie de potencias: $y''+ xy = 0$ Por el método de coeficientes indeterminados de series

Por el teorema anterior, existen 2 soluciones en serie de potencias centradas, convergentes para $|x| < \infty$.

Sustituyo: $y = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n$ y su 2da derivada: $y'' = \sum_{0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$ → $y''+ xy = \sum_{0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{0}^{\infty} c_n x^n = 0$

Cambio el índice de suma: $y''+ xy = \sum_{2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1), C_{k+2}+C_{k+1}]x^k = 0$

El coeficiente de la potencia de **x=0**, es decir $2c_2=0$, por lo que:
$(k+2)(k+1), c_{k+2} + c_{k+1} = 0$, con **k=1,2,3,..**
Resolver: $(k+2)(k+1), c_{k+2} + c_{k+1} = 0$ para: c_{k+2} en término: c_{k+1}

$$C_{k+2} = -\frac{C_{k+1}}{(k+1)(k+2)}$$ para: **k=1,2,3,..**

k = 1→ $c_3=- c_0 /2.3= -c_0/(2.3)$
k = 2→ $c_4=- c_1 /3.4= -c_1/(3.4)$
k = 3→ $c_5=- c_2 /4.5= -c_2/(4.5)$
k = 4→ $c_6=- c_3 /5.6= -c_3/(5.6) = -c_0/(2.3.5.6)$
k = 5→ $c_7=- c_4 /6.7= -c_1/(3.4.6.7)$

Sustituir los coeficientes en: $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + C_7x^7 + ...$

Se obtiene: $$y = c_0 + c_1x + 0 - \frac{c_0}{2.3}x^3 - \frac{c_1}{3.4}x^4 + 0 + \frac{c_0}{2.3.5.6}x^6 + \frac{c_1}{3.4.6.7}x^7 + ...$$

Luego de agrupar los términos que contienen C_0 y los que contienen C_1, se obtiene $y = C_0y_1(x) + C_1y_2(x)$, dónde:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2.3...(3k-1).3k}.x^{3k}$$ y $$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3.4...3k.(3k+1)}.x^{3k+1}.$$

La combinación lineal $y = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$ (**ecuación de Airy**) es solución general de la ecuación diferencial.

12. **COEFICIENTES NO POLINOMIALES:** Encontrar una solución en serie de potencias respecto a un punto ordinario $x_0 = 0$ de una ecuación diferencial cuando sus coeficientes no son polinomios.

Ejemplo: Para resolver por serie de potencias: **y'' + (Cos.x)y = 0**

x = 0 es un punto ordinario de la ecuación debido a que: **Cos.x** es analítica en ese punto.

Usando la **serie de Maclaurin** para **Cos x** dada en $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ junto con la suposición de que

$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n . x^n$ y sabiendo que $y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n . n x^{n-1}$ y $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n . n(n-1) x^{n-2}$ se encuentra

$$y'' + (\cos x) y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Obtenidos los coeficientes **C** agrupamos términos para llegar a la solución general.

$y = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$ donde: $y_1 = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^4 - \ldots$ y $y_2(x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{30} x^5 - \ldots$.

Como la ecuación no tiene puntos significativos finitos, ambas series de potencias convergen para $|x| < \infty$

Proceso	Ejemplo
Llevo a forma: **y'+ ky = 0**, luego reemplazo en ella: $\mathbf{y} = \sum_0^{\infty} a_n \mathbf{x^n}$ [0] y su derivada: $\mathbf{y'} = \sum_1^{\infty} n.a_n \mathbf{x^{n-1}}$: $\mathbf{y' + ky} = \sum_1^{\infty} n.a_n \mathbf{x^{n-1}} + \mathbf{k} \sum_0^{\infty} a_n \mathbf{x^n} = 0$ [I] → $\sum_1^{\infty} n.a_n \mathbf{x^{n-1}} = \mathbf{k} \sum_0^{\infty} a_n \mathbf{x^n}$ Ajusto índices de sumas, así aparece $\mathbf{x^n}$ en cada serie:	Resolver: **y'- 2 y = 0** $\sum_1^{\infty} n.a_n x^{n-1} - 2 \sum_0^{\infty} a_n x^n = 0$
• $\sum_1^{\infty} n.a_n \mathbf{x^{n-1}} = 1a_1 x^0 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + \ldots\ n a_n x^{n-1} +$ [*] • $\sum_0^{\infty} (n+1).a_{n+1} \mathbf{x^n} = 1a_1 x^0 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + \ldots\ n a_n x^{n-1} +$ [**]	$\sum_0^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 2 \sum_0^{\infty} a_n x^n$ $\sum_0^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 2 \sum_0^{\infty} a_n x^n$
Luego como [*]= [**]: $\sum_0^{\infty} (n+1).a_{n+1} \mathbf{x^n} = \mathbf{k} \sum_0^{\infty} a_n \mathbf{x^n}$ [II]	
Reemplazo [II] en [I] : $\sum_0^{\infty} (n+1).a_{n+1} \mathbf{x^n} + \mathbf{k} \sum_0^{\infty} a_n \mathbf{x^n} = 0$	$\sum_0^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 2 \sum_0^{\infty} a_n x^n = 0$
Factor común $\mathbf{x^n}$: $\sum_0^{\infty} [\ (n+1)\ a_{n+1} + k\ a_n\ ]\ x^n = 0$	$\sum_0^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - 2 a_n]\ x^n = 0$
Luego: $(n+1)\ a_{n+1} + k\ a_n = 0$ → $(n+1)\ a_{n+1} = k\ a_n$ **Fórmula de la recurrencia**: $\mathbf{a_{n+1} = k\ a_n / (n+1)}$ Para n=0: $a_{0+1} = a_1 = k\ a_0 / (0+1) = k\ a_0 / 1$ → $a_1 = k\ a_0 / 1 = k^1\ a_0 / 1!$ Para n=1: $a_{1+1} = a_2 = k\ a_1 / (1+1) = k\ a_1 / 2$ → $a_2 = k\ k\ a_0 / 1.\ 2 = k^2\ a_0 / 2!$ Para n=2: $a_{2+1} = a_3 = k\ a_2 / (2+1) = k\ a_2 / 3$ → $a_3 = k\ k\ k\ a_0 / 1.\ 2.\ 3 = k^3\ a_0 / 3!$ Generalizando: → $\mathbf{a_n = k^n\ a_0 / n!}$ [IV]	$\mathbf{a_{n+1}} = \frac{2a_n}{(n+1)}$ $\mathbf{a_n} = \frac{2^n a_o}{n!}$
Reemplazo [IV] en [0] : $y = \sum_0^{\infty} a_n \mathbf{x^n} = \sum_0^{\infty} (k^n\ a_0 / n!)\ x^n$ $y = \sum_0^{\infty} k^n a_0 \frac{x^n}{n!} = a_0 \sum_0^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!}$ Reemplazo función exponencial: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.	$y = \sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n a_o}{n!} . x^n = a_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2.x)^n}{n!}$ En: $y = a_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2.x)^n}{n!}$, Solución: $\mathbf{y = a_0\ e^{2x}}$

Proceso	Ejemplo
Llevo a forma: **y'+ ky = 0**, luego reemplazo en ella:	Resolver: $y' - x^2 y = 0$

y = $\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** [0] y su derivada: y' = $\sum_{1}^{\infty} n.a_n$ **x^{n-1}**:

$\sum_{1}^{\infty} n.a_n$ **x^{n-1}** + **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** = **0** [I] → $\sum_{1}^{\infty} n.a_n$ **x^{n-1}** = **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n**

$$\sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} - x^2 \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} = x^2 \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$$

Ajusto índices de sumas, así aparece **x^n** en cada serie:

$\sum_{0}^{\infty} (n+1).a_{n+1}$ **x^n** = **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** [II]

$$\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = x^2 \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$$

Reemplazo [II] en [I] : $\sum_{0}^{\infty} (n+1).a_{n+1}$ **x^n** + **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** = **0**

Factor común: $\sum_{0}^{\infty}$[**(n+1) a$_{n+1}$** + **k a$_n$**] **x^n** = **0**

Luego: **(n+1) a$_{n+1}$** + **k a$_n$** = **0** → **(n+1) a$_{n+1}$** = **k a$_n$**

Fórmula de la recurrencia: **a$_{n+1}$ = k a$_n$ / (n+1)**

$$(n+1)a_{n+1} = x^2 a_n$$

Para n=0: **a$_{0+1}$ = a$_1$ = k a$_0$ / (0+1) = k a$_0$ / 1 → a$_1$ = k a$_0$ / 1 = k^1 a$_0$ / 1!**
Para n=1: **a$_{1+1}$ = a$_2$ = k a$_1$ / (1+1) = k a$_1$ / 2 → a$_2$ =kka$_0$ /1.2=k^{2}a$_0$ / 2!**
Para n=2: **a$_{2+1}$ = a$_3$ = ka$_2$ /(2+1)=ka$_2$/3→a$_3$ = kkka$_0$ /1.2.3 = k^{3}a$_0$ /3!**
Generalizando: → **a$_n$ = k^n a$_0$ / n!** [IV]

a$_{n+1}$= $\dfrac{x^2 a_n}{(n+1)}$ para $n \geq 0$ **a$_n$** $= x^2 \dfrac{a_o}{n!}$

Reemplazo [IV] en [0] : **y** = $\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** = **k^n a$_0$ / n!**

Reemplazo la función exponencial: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 a_o}{n!}.x^n = a_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

Proceso	Ejemplo
Llevo a forma: **y'+ ky = 0**, luego reemplazo en ella: y = $\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** [0] y su derivada: y' = $\sum_{1}^{\infty} n.a_n$ **x^{n-1}**: $\sum_{1}^{\infty} n.a_n$ **x^{n-1}** + **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** = **0** [I] → $\sum_{1}^{\infty} n.a_n$ **x^{n-1}** = **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n**	Resolver: **y'- 4 y = 0** $\sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1}$ - **4** $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ = **0**
Ajusto índices de sumas, así aparece **x^n** en cada serie: $\sum_{0}^{\infty} (n+1).a_{n+1}$ **x^n** = **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** [II]	$\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = 4\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ $\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - 4\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$
Reemplazo [II] en [I] : $\sum_{0}^{\infty} (n+1).a_{n+1}$ **x^n** + **k**$\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** = **0**	$\sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - 4\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 0$
Factor común: $\sum_{0}^{\infty}$[**(n+1) a$_{n+1}$** + **k a$_n$**] **x^n** = **0**	$\sum_{0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - 4a_n]\ x^n = 0$
Luego: **(n+1) a$_{n+1}$** + **k a$_n$** = **0** → **(n+1) a$_{n+1}$** = **k a$_n$** **Fórmula de la recurrencia**: **a$_{n+1}$ = k a$_n$ / (n+1)** Para n=0: **a$_{0+1}$ = a$_1$ = k a$_0$ / (0+1) = k a$_0$ / 1 → a$_1$ = k a$_0$ / 1 = k^1 a$_0$ / 1!** Para n=1: **a$_{1+1}$ = a$_2$ = k a$_1$ / (1+1) = k a$_1$ / 2 → a$_2$ = k k a$_0$ / 1. 2 = k^2 a$_0$ / 2!** Para n=2: **a$_{2+1}$ = a$_3$ = k a$_2$ / (2+1) = k a$_2$ / 3 → a$_3$ = k k k a$_0$ / 1. 2. 3 = k^3 a$_0$ / 3!** Generalizando: → **a$_n$ = k^n a$_0$ / n!** [IV] Reemplazo [IV] en [0] : **y** = $\sum_{0}^{\infty} a_n$ **x^n** = **k^n a$_0$ / n!**; Reemplazo: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.	**a$_{n+1}$** = $\dfrac{4a_n}{(n+1)}$ a$_n$ = $\dfrac{4^n a_o}{n!}$ $y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n a_o}{n!}.x^n = a_o \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4.x)^n}{n!}$ En: **y=** $a_o \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4x)^n}{n!}$, Solución: **y = a$_0$ e^{4x}**

APLICACIÓN: CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO

En periodos cortos la tasa de crecimiento de algunas poblaciones es proporcional a la población presente en cualquier momento:

$$dx/dt = k.x \quad (1)$$

Donde **k**: constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de fenómenos de crecimiento o decaimiento.

Si conocemos una población en cierto momento inicial $t = 0$, la solución de predice la población en el futuro, para $t > 0$ $x(t_0) = x_0$

EJEMPLO 1: **Crecimiento de bacterias**: Un cultivo al inicio tiene P_0 cantidad de bacterias. En $t = 1$ se determina que el numero de bacterias es $3/2\ P_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P_{(t)}$ presentes en el tiempo **t**, determine el tiempo necesario para triplicar el numero de bacterias.

Resuelve la ecuación (1), donde $x = P$. → $dP/dt = k.P$, con $t_0 = 0$, la condición inicial: $P(0) = P_0$. Entonces se usa la observación empírica de que $P(1) = 3/2\ P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad **k**.

La ecuación: $dP/dt = k.P$, es lineal de 1er orden, de forma:

$$P' = -k.P \rightarrow P' + kP = 0, \quad \text{su solución:} \quad y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$$

Por TEOREMA 1: Diferenciación termino a termino de series de potencias

Solución: $P = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n$, la 1ra derivada: $P' = \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} \rightarrow P' = \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$

Sustituyendo en: $P'+kP = 0$: $\sum_{1}^{\infty} n.a_n t^{n-1} + k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n = 0 \rightarrow \sum_{1}^{\infty} n.a_n t^{n-1} = -k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n$

Ajustando los índices de la suma de modo que aparezca t^n en cada serie

$$\sum_{1}^{\infty} na_n t^{n-1} + k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n = 0 \rightarrow \sum_{0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} t^n + k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n = 0 \rightarrow \sum_{0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + k\, a_n]t^n = 0$$

O sea: $(n+1)a_{n+1} = -k.a_n$, de donde: **FORMULA DE RECURRENCIA**: $a_{n+1} = -ka_n/(n+1)$, para: $n \geq 0$

Genera los siguientes coeficientes:

Para n=0: $a_{0+1} = a_1 = -k\, a_0 / (0+1) = -k\, a_0 / 1 \rightarrow a_1 = -k\, a_0 / 1 = k^1\, a_0 / 1!$

Para n=1: $a_{1+1} = a_2 = -k\, a_1 / (1+1) = -k\, a_1 / 2 \rightarrow a_2 = -k\, k\, a_0 / 1.\,2 = k^2\, a_0 / 2!$

Para n=2: $a_{2+1} = a_3 = -k\, a_2 / (2+1) = -k\, a_2 / 3 \rightarrow a_3 = -k\, k\, k\, a_0 / 1.\,2.\,3 = k^3\, a_0 / 3!$ Generalizando: $a_n = -k^n\, a_0 / n!$ [IV]

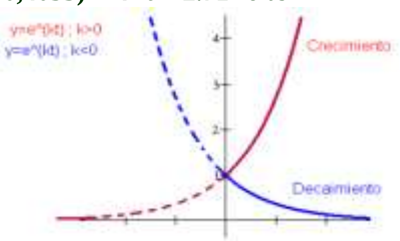
Solución: $P = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{0}^{\infty} [-k^n a_0 / n!]t^n = a_0 \sum_{0}^{\infty} [-(t.k)^n / n!]$ $\quad P = a_0 \sum_{0}^{\infty} -(t.k)^n / n!$ [V]

Reemplazo en [V] la serie de potencia para exponenciales: $e^t = \sum_{0}^{\infty} [(t.n)^n / n!] \rightarrow P = a_0\, e^{-kt}$

$\frac{dP}{dt}[e^{-kt} P] = 0$ y $e^{-kt} P = 0$ luego en $t=0$ se deduce: $P_{(t)} = c\, e^{-kt}$ Para: $t=0$ se tiene $P_{(0)} = ce^{-kt} = ce^{-0} = c$

Por tanto, $P_{(t)} = P_{(0)}\, e^{-kt}$, luego en $t=1$: $(3/2)\ P_{(0)} = P_{(0)}\, e^k \rightarrow e^k = 3/2 \rightarrow k = \ln(3/2) = 0{,}4055$ $\quad t = \ln 3$

$t = \ln 3 / 0{,}4055)$ → $t = 2.71$ horas



El número real **Po** de bacterias en el tiempo **t=0** no consideró el cálculo del tiempo para triplicar el numero de bacterias en el cultivo. El tiempo para triplicar una población inicial de, por ejemplo 100 bacterias o 1.000.000 es de mas o menos 2.71 Horas.
La función exponencial e **kt** se incrementa al aumentar **t** para **k** y disminuye cuando aumenta **t** para **k<0**. Por ello, **k** es una constante de **crecimiento** (**k>0**) o una constante de **decaimiento** (**k<0**).

APLICACIÓN: POBLACIONES DE BACTERIAS

Para calcular la población de bacterias en un medio ambiente determinado, se puede recurrir a una ecuación diferencial.

Si n_y es la tasa de natalidad (número de nacimientos percapita en la unidad de tiempo) y m_y la tasa de mortalidad (número de muertes percapita en la unidad de tiempo), entonces la variación Δy del tamaño de la población en un intervalo de tiempo Δt es: $\Delta y = n_y \Delta t - m_y \Delta t$ Es decir que: $\Delta y / \Delta t = n_y - m_y$ Por lo cual queda: $y' = (n - m)_y$ y $z = k\,t$

Para k, igual a la tasa de natalidad (n) menos la tasa de mortalidad (m). Reemplazo en: $k = n - m$ queda: $y' = ky$
Para: $a = 0$ (la serie de Taylor se convierte en la de Maclaurin). Partiendo de la ecuación diferencial se calculan sus derivadas con la intención de luego usarlas en la formula de la serie de Maclaurin.

	Para t=0 → y= y_0
$y' = ky$	$y'_{(0)} = ky_0 =$
$y'' = ky'$	$y''_{(0)} = ky' = k^2 y_0$
$y''' = ky''$	$y'''_{(0)} = ky'' = k^3 y_0$

Sustituyendo en serie de **Maclaurin**:

$$y(t) = y_0 + (ky_0)t + \frac{(k^2 y_0)t^2}{2!} + \frac{(k^3 y_0)t^3}{3!} + \frac{(k^4 y_0)t^4}{4!} + \ldots$$

Por la propiedad reciproca de la distributiva de la potencia con respecto a la multiplicación, agrupamos **kx** con el mismo exponente: $y(t) = y_0 + y_0(kt) + \frac{y_0(kt)^2}{2!} + \frac{y_0(kt)^3}{3!} + \frac{y_0(kt)^4}{4!} + \ldots$; factor común y_0: $y(t) = y_0\left[1 + (kt) + \frac{(kt)^2}{2!} + \frac{(kt)^3}{3!} + \frac{(kt)^4}{4!} + \ldots\right]$

Notar que la expresión que está entre corchetes pertenece a una serie infinita, que puede ser expresada por la sumatoria:

$y(t) = y_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!}$ La serie que tiene una clara similitud con $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!}$, con lo cual si en la expresión anterior.

Si: $z = kt$ → $y(t) = y_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^n}{n!}$ Por analogía respecto a e^x: $y_{(t)} = y_0 e^z$ Como: $z = kt$, la expresión final sería: $y_{(t)} = y_0 e^{kt}$

Solución aplicando series de potencias: $y' = ky$: Reemplazo k por z, la ecuación queda: $y' = zy$ $\quad y' - zy = 0$

$\sum_{n-1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - z\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$ para k=n-1 y k=n → $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}x^k - z\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\ (k+1)c_{k+1} - zc_x\ \right] = 0 \Rightarrow c_{k+1} = \frac{zc_x}{k+1}$$

Para k=0 → $c_1 = z.c_0/1 = z^1.c_0/1$
Para k=1 → $c_2 = z.c_1/2 = z^2.c_0/2$
Para k=2 → $c_3 = z.c_2/3 = z^3.c_0/3$
Para k=3 → $c_4 = z.c_3/4 = z^4.c_0/12$
Para k=4 → $c_5 = z.c_4/5 = z^5.c_0/60$

$$y = c_o + zc_0 x + \frac{z^2 c_0}{2}x^2 + \frac{z^3 c_0}{3}x^3 + \frac{z^4 c_0}{12}x^4 + \frac{z^5 c_0}{60}x^5$$

$$y = c_0\left[zx + \frac{z^2}{2}x^2 + \frac{z^3}{3}x^3 + \frac{z^4}{12}x^4 + \frac{z^5}{60}x^5\right] = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!} \Rightarrow y = c_o e^{zx}$$

Reemplazando z por k: $y = c_o e^{kx}$

Suponiendo que la población inicial de bacterias de Escherichia Coli es 25 bacterias; que la tasa de nacimientos percápita es 16 nacimientos por día; y que la tasa de mortalidad percápita es 11 muertes por día. Calcular en **t = 10 días** cual es la población de bacterias: $k = n - m$; **n=16**[nacimientos/dia] y **m=11**[muertos/dia]

$y_{(10)} = 25.e^{(16-11)10}$ → $y_{(10)} = 25.e^{(5)10}$ → $y_{(10)} = 25.e^{50}$ → $y_{(10)} = 1{,}29617 \,.\, 10^{23}$ **bacterias**

En pocas horas las bacterias aumentará su población exponencialmente. Cuando una población se encuentra en un nuevo ambiente, pasa 1ro por una fase de adaptación, con lento crecimiento y elevada tasa de biosíntesis de las proteínas necesarias para un rápido crecimiento. En una 2da fase, con una elevada concentración de nutrientes, las bacterias crecen hasta un tamaño fijo y luego se reproducen en forma asexuada, por fisión binaria. Este proceso tarda, según el tipo de bacteria, entre 15 y 30 minutos.

Si n > m el crecimiento de la población es exponencial, como observó Thomas Malthus (1766–1834) para el caso de la especie humana. Si n = M entonces la población permanece estacionaria, y si n < m entonces decae exponencialmente; es gracias a esto que los antibióticos funcionan, ya que lo que estos hacen es que el cuerpo humano no sea apto para la reproducción de la bacteria que está atacando, lo cual hace que decaiga exponencialmente la población quedando así en poco tiempo sin bacterias en el organismo.

APLICACIÓN: VIDA MEDIA

En física, la **vida media** es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es simplemente el tiempo que tarda en desintegrarse, o transmutar en átomos de otro elemento, la mitad de los átomos de una cantidad inicial Ao.

VIDA MEDIA DEL PLUTONIO: Un reactor auto regenerador convierte el uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que se desintegró 0.043% de la cantidad inicial Ao de plutonio.

Calcule la vida media de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente.
Solución: Sea A(t) la cantidad de plutonio presente en el tiempo t.

$dA/dt = kA \rightarrow A(0) = \mathbf{A_{(0)}}$ obtenemos: $\mathbf{A' - kA = 0}$. La solución se expresa como: $\mathbf{A = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n}$

Por TEOREMA 1: Diferenciación termino a termino de series de potencias

Solución: $\mathbf{P = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n}$, la 1ra derivada: $\mathbf{P' = \sum_{1}^{\infty} n.a_n x^{n-1}} \rightarrow \mathbf{P'} = \sum_{1}^{\infty} \mathbf{n.a_n x^{n-1}} = \sum_{0}^{\infty} \mathbf{(n+1)a_{n+1}x^n}$

Sustituyendo en: $\mathbf{P'+kP = 0}$: $\sum_{1}^{\infty} \mathbf{n.a_n t^{n-1}} + k\sum_{0}^{\infty} \mathbf{a_n t^n = 0} \rightarrow \sum_{1}^{\infty} \mathbf{n.a_n t^{n-1} = -k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n}$

Suma de dos series término a término:

$$\sum_{n=i_0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum_{n=i_0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=i_0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$$

Ajustando los índices de la suma de modo que aparezca $\mathbf{t^n}$ en cada serie

$$\sum_{1}^{\infty} \mathbf{na_n t^{n-1} + k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n = 0} \rightarrow \sum_{0}^{\infty} \mathbf{(n+1)a_{n+1}t^n + k\sum_{0}^{\infty} a_n t^n = 0} \rightarrow \sum_{0}^{\infty} \mathbf{[(n+1)a_{n+1} + k\, a_n]t^n = 0}$$

O sea: $\mathbf{(n+1)a_{n+1} = -k.a_n}$, de donde: **FORMULA DE RECURRENCIA**: $\mathbf{a_{n+1} = ka_n/(n+1)}$, para: $n \geq 0$

- Para n=0 → $\mathbf{a_1} = k.\mathbf{a_0}/1 = k.\mathbf{a_0}/1!$
- Para n=1 → $\mathbf{a_2} = k.\mathbf{a_1}/2 = k^2.\mathbf{a_0}/2!$
- Para n=2 → $\mathbf{a_3} = k.\mathbf{a_2}/3 = k^3.\mathbf{a_0}/3!$
- Para n=n → $\mathbf{a_n} = k.\mathbf{a_{n-1}}/n = k^n.\mathbf{a_0}/n!$

La solución esta dada por: $A = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{k^n a_0}{n!} t^n = a_0 \sum_{0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!}$

Usando la expresión de serie de potencia para funciones exponenciales: $e^t = \sum_{0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

Resultando: $A(t) = a_0 \sum_{0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!} = a_0 e^{kt}$ $\quad A_{(t)} = A_0\, e^{\mathbf{kt}}$

Si 0.043% de los átomos de A_0 se desintegró, luego aún queda 99.957% de la sustancia.

Para hallar la constante de decaimiento **k**, se utiliza: B 0,99957 $A_0 = A_0^{\mathbf{-15t}} \rightarrow A_0^{\mathbf{15t}}$

Luego el valor de la constante: k = (1/15)ln0,99957 = - 0,00002867 → $A_{(t)} = A_0\, e^{\mathbf{-0,00002867t}}$

La vida media: $A_{(t)} = (1/2)A_0$, para **t**: se obtiene: $(1/2)A_0 = (1/2)A_0\, e^{\mathbf{-0,00002867t}} \rightarrow (1/2) = A_0\, e^{\mathbf{-0,00002867t}}$

La última ecuación genera: t = ln 2 / -0,00002867 = 24.180 años

MÉTODO DE FROBENIUS: Para resolver una ecuación diferencial: **$a_2(x)y'' + a_1y' + a_0y = 0$** respecto a un punto singular regular, se emplea el **TEOREMA DE ROUCHÉ FROBENIUS**:

Previo a resolver un sistema de ecuaciones lineales, se dar dar respuesta a las siguientes preguntas:

- El sistema tiene solución, es decir, es compatible?
- En caso afirmativo: ¿Tiene una solución o infinitas?

Para responderlas, usamos el Teorema de Rouché-Fröbenius, cuyo enunciado es el siguiente:

Consideremos un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Sean **A** la matriz del sistema y **A*** la matriz ampliada del sistema (con los términos independientes).

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{vmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas (**A**) sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes (**A***). Es decir: **rango (A) = rango (A*)**.

Si el valor común de los rangos coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado, caso contrario, el valor de los rangos es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En resumen, Si:

- rango (A) = rango (A*) = n (número de incógnitas), el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).
- rango (A) = rango (A*) < n (número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).
- rango (A) # rango (A*), el sistema es incompatible (no tiene solución).

En nuestro caso, si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial $a_2(x)y'' + a_1y' + a_0y = 0$, entonces existe por lo menos una solución de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r}$$

En el Método de Frobenius, la solución en serie respecto a un punto singular regular x_0, es similar al "método de coeficientes indeterminados de series" donde se sustituye $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y se determinan los coeficientes C_n desconocidos.

Antes de determinar coeficientes, se halla el exponente desconocido **r** . Si se encuentra que **r** es un número que no es entero negativo, la solución correspondiente $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r}$ no es una serie de potencias.

DETERMINACIÓN DE UNA SEGUNDA SOLUCIÓN

Si la diferencia $r_1 - r_2$ es entera positiva, podrían haber, dos soluciones de forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$, que se determina después de hallar las raíces y examinar la relación de recurrencia que definen los coeficientes C_n.

La 2da solución, $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$, también es solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, siempre que: $y_1(x)$ sea una solución conocida.

De las 3 formas de la ecuación lineal de 2do orden: $a_2(x)y'' + a_1y' + a_0y = 0$, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y $(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$, al resolver una ecuaciones diferencial con el método de Frobenius, se recomienda usar la forma: $a_2(x)y'' + a_1y' + a_0y = 0$.

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ÓRDEN

Tiene la forma general: $A_{(x)}y'' + B_{(x)}y' + C_{(x)}y = F_{(x)}$ .. [1], cuyas funciones coeficientes **A**, **B**. y **C** son continuas en el intervalo abierto.

Dividiendo [1] en $A_{(x)} \rightarrow$ $y'' + p_{(x)}y' + q_{(x)}y = f_{(x)}$ [2], cuya ecuación lineal homogénea asociada es:
$y'' + p_{(x)}y' + q_{(x)}y = 0$ [3]

TEOREMA 1: Sean $y_{(1)}$ e $y_{(2)}$ dos soluciones de: $y''+p_{(x)}y'+ q_{(x)}y = 0$, si $c_{(1)}$ y $c_{(2)}$ son constantes, luego la combinación lineal $y = c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)}$ también es solución.

Proceso	Ejemplo 1
Si: $y_{(1)}$ e $y_{(2)}$ son soluciones de: $y''+p_{(x)}y'+ q_{(x)}y = 0$ Si: $c_{(1)}$ y $c_{(2)}$ son constantes	$y_1 = \text{Cos } x$ e $y_2 = \text{Sen } x$ $y''+ y = 0$
Solución general: $c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)} = y$ Cuya derivada: $c_{(1)}\, y_{(1)}' + c_{(2)}\, y_{(2)}' = y'$ Si: $y = y_{(a)} \rightarrow y' = y_{(a)}'$ ▪ $c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)} = y_{(a)}$ ▪ $c_{(1)}\, y_{(1)}' + c_{(2)}\, y_{(2)}' = y_{(a)}'$ Si: $y_{(a)} = b_o$ e $y'_{(a)} = b_1$ • $c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)} = b_0$ • $c_{(1)}\, y_{(1)}' + c_{(2)}\, y_{(2)}' = b_1$	$c_{(1)}\, \text{Cos } x + c_{(2)}\, \text{Sen } x = y$
Determino $c_{(1)}$ y $c_{(2)}$ por el sistema de ecuaciones: • $c_1\, y_{1(a)} + c_2\, y_{2(a)} = b_o$ • $c_1\, y_{1(a)}' + c_2\, y_{2(a)}' = b_1$ Aplico determinante entre $y_{(1)}$ e $y_{(2)}$ y sus derivadas	• $c_1 \text{ Cos } x + c_2 \text{ Sen } x = b_o$ • $c_1 \text{ Cos' } x + c_2 \text{ Sen' } x = b_1$

Proceso	Ejemplo 2
Si: $y_{(1)}$ e $y_{(2)}$ son soluciones de: $y''+p_{(x)}y'+ q_{(x)}y = 0$ Si: $c_{(1)}$ y $c_{(2)}$ son constantes	$y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$
Solución general: $c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)} = y$ Cuya derivada: $c_{(1)}\, y_{(1)}' + c_{(2)}\, y_{(2)}' = y'$ Si: $y = y_{(a)} \rightarrow y' = y_{(a)}'$ ▪ $c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)} = y_{(a)}$ ▪ $c_{(1)}\, y_{(1)}' + c_{(2)}\, y_{(2)}' = y_{(a)}'$ Si: $y_{(a)} = b_o$ e $y'_{(a)} = b_1$ • $c_{(1)}\, y_{(1)} + c_{(2)}\, y_{(2)} = b_0$ • $c_{(1)}\, y_{(1)}' + c_{(2)}\, y_{(2)}' = b_1$	$x^2y''- 4xy' + 6y = y'' - \frac{4}{x}.y' + \frac{6}{x^2}.y = 0$ $y_1 = c_1\, y + c_2\, y_2 = c_1\, x^2 + c_2\, x^3$
Determino $c_{(1)}$ y $c_{(2)}$ por el sistema de ecuaciones: • $c_1\, y_{1(a)} + c_2\, y_{2(a)} = b_o$ • $c_1\, y_{1(a)}' + c_2\, y_{2(a)}' = b_1$ Aplico determinante entre $y_{(1)}$ e $y_{(2)}$ y sus derivadas	• $c_1\, x^2 + c_2\, x^3 = b_o$ • $c_1\, x^{2'} + c_2\, x^{3'} = b_1$

WRONSKIANO:

Función en honor al matemático polaco Józef HoeneWroński, aplicada al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En un intervalo dado, el conjunto de **n** funciones linealmente independientes, **$f_1,\ldots, f_n$**, **el wronskiano** **$W(f_1,\ldots, f_n)$** está dado por el determinante de la matriz cuadrada, o **matriz fundamental**, formada por las:

- **1ra** fila: Funciones
- **2da** fila: Derivada de Funciones
  y así hasta . . .
- **n-1** fila: Derivada **n-1** de Funciones

$$W(f_1,\ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Si:

- El **$W(f_1,\ldots, f_n) \neq 0$** en algún punto de un intervalo, las funciones asociadas son linealmente independientes en el intervalo.
- Dos soluciones de una ecuación diferencial de 2do orden son independientes, si el **$W(f_1,\ldots, f_n) = 0$** sobre el intervalo, las funciones pueden ser o no linealmente independientes.
- La función es linealmente dependiente en un intervalo, implica que su **$W(f_1,\ldots, f_n) = 0$** en el intervalo, pero lo segundo no implica lo primero. Si **$W(f_1,\ldots, f_n) = 0$** en cualquier lugar, implica incorrectamente una dependencia. Estas dos declaraciones son alternativas de la misma verdad.

Ejemplos:

El wronskiano para las funciones: x^2, x, y 1, definidas para un número real x. será →

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Como **$W \neq 0$**, las funciones son linealmente independientes.

El **$W(f_1,\ldots, f_n)$** de: **$2x^2 + 3, x^2, 1. = 0$**,
son funciones dependientes, pues:
$W(f_1,\ldots, f_n)$ de: **$2x^2 + 3 = 2(x^2) + 3(1)$** →

$$W = \begin{vmatrix} 2x^2+3 & x^2 & 1 \\ 4x & 2x & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8x - 8x = 0.$$

Si: **$W(f_1,\ldots, f_n) = 0$**, no implica funciones linealmente dependientes.
Las funciones: x^3 y $|x^3|$ (valor absoluto de x^3)

La 2da función puede ser escrita como:

$$|x^3| = \begin{cases} -x^3, & \text{si } x < 0 \\ x^3, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = -3x^5 + 3x^5 = 0, & \text{si } x < 0 \\ \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^5 - 3x^5 = 0, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estas dos funciones son linealmente independientes sobre el conjunto de número reales, sin embargo, su wronskiano parece ser cero:

Como una ecuación diferencial ordinaria es una relación que contiene funciones de una sola variable independiente, y una o más de sus derivadas con respecto a esa variable. La derivada es una función que cambia (valor de la variable dependiente) a medida que acmbia su entrada (valor de la variable independiente). El wronskiano es una función para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En una ecuación lineal de 2do orden, el wronskiano puede calcularse por la identidad de Abel: Dada una ecuación diferencial de orden **n**, calcular el valor del wronskiano de sus soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$.., $y_n(x)$, en función de los coeficientes de la ecuación diferencial, de la forma:

$$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + .. + a_1(x)\, y^1 + a_0(x)\, y = 0 \rightarrow W[y_1(x), y_2(x), .. y_n(x)] = C.\, e^{\int \frac{-a_{n-1}(x)}{a_n(x)} dx}$$

Dados dos funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ linealmente dependientes en un intervalo abierto, ambas estan definidas si son proporcionales en dicho intervalo, si: $y_1 = k_1 y_2$ o $y_2 = k_2 y_1$: donde k_1 y k_2 son constantes:

INDEPENDENCIA LINEAL

- Si: $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son proporcionales en el intervalo, son linealmente independientes en el mismo.
- Si: $y_1/\, y_2$ es constante entonces las funciones son linealmente dependientes.
- Si: $y_1/\, y_2$ es funcion de **x**, entonces las funciones son linealmete independientes.

Ejemplos:

- $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 2x$ $\rightarrow$ $y_1/\, y_2 = x/2x = ½$: Es linealmente dependiente.
- $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = 1/4\, e^{-2x}$ $\rightarrow$ $y_1/\, y_2 = e^{-2x} / 1/4\, e^{-2x} = 4$: Es linealmente dependiente.

DEPENDENCIA e INDEPENDENCIA LINEAL con el METODO WRONSKIANO

Las funciones: $y_1(x_1), y_2(x_2), \ldots, y_n(x_n)$ son linealmente dependientes en el intervalo, si al menos una de ellas puede expresarse como combinacion lineal de las otras, caso contrario las funciones son linealmente independientes.

- Wronskiano = 0: Es dependiente
- Wronskiano ≠ 0: Es independiente

Ejemplo: $y_1 = e^x$ $y_2 = e^{-x}$ $y_3 = e^{2x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} \begin{matrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{matrix}$$

$$W = -4e^{2x} + 2e^{2x} + e^{2x} + e^{2x} - 2e^{2x} - 4e^{2x} = -6e^{2x}$$

Es linealmente independiente

Ejemplo: $y_1 = x$ $y_2 = 2x$

$$W = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$W = 2x - 2x = 0$$

Es linealmente dependiente

Ejemplo:

$$W(\text{Cos } x, \text{Sen } x) = \begin{vmatrix} \text{Cos } x, & \text{Sen } x \\ -\text{Sen } x, & \text{Cos } x \end{vmatrix}$$

$$W(\text{Cos } x, \text{Sen } x) = \text{Cos}^2 x + \text{Sen}^2 x = 1$$

Ejemplo:

$$W(e^x, x\, e^x) = \begin{vmatrix} e^x & x\, e^x \\ e^x & +x\, e^x \end{vmatrix}$$

$$W(e^x, xe^x) = e^x\, e^x + x\, e^x = e^{2x}$$

Ejemplo:

$$W(x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}$$

$$W(x^2, x^3) = x^2.3x^2 - 2x.x^3 = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

Ejemplo:

$$W(\ln x, x^2) = \begin{vmatrix} \ln x & x^2 \\ 1/x & 2x \end{vmatrix}$$

$$W(\ln x, x^2) = 2x.\ln x - \frac{1}{x}.x^2 = 2x.\ln x - x = x(2.\ln x - 1)$$

Si las funciones: **f** y **g** son linealmente dependientes, **W(f,g) ≡ 0**, resulta **f = k.g**, por tanto:

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} kg & g \\ kg' & g' \end{vmatrix} = k.g.\, g' - k.g'.g \equiv 0$$

TEOREMA: **CRITERIO PARA SOLUCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES**

Sean $y_1, y_2,..., y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I. El conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I y sólo si $W(y_1, y_2,..., y_n) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Ejemplo:

$$W(\cos x, senx) = \begin{vmatrix} \cos x & senx \\ -senx & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + sen^2 x = 1$$ Linealmente independiente.

DEFINICIÓN: **CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES**

Cualquier conjunto $y_1, y_2,..., y_n$ de **n** soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea de **n**-ésimo orden en un intervalo **I** es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

TEOREMA: **EXISTENCIA DE UN CONJUNTO FUNDAMENTAL**

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en intervalo I.

TEOREMA: **SOLUCIÓN GENERAL, ECUACIONES HOMOGÉNEAS**

Sea $y_1, y_2,..., y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$ donde $c_i, i = 1,2,..., n$ son constantes arbitrarias.

Ejemplo: Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9x = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
Las soluciones son linealmente independientes en eje **x**, como se ve en el wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y, en consecuencia, $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo.

Ecuación lineal de ORDEN MAYOR a 2 Coeficientes constantes

Sea: $\mathbf{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdot \cdot + a_1 y' + a_0 y = 0}$, donde: $\mathbf{a_0, a_1, .. a_n}$ son constantes, entonces su polinomio característico es:
$\mathbf{a_n m^{(n)}} + \mathbf{a_{n-1} m^{(n-1)}} + \dots + \mathbf{a_1 m} + \mathbf{a_0} = 0 = \mathbf{P_n(m)}$, que factorizado:
$\mathbf{P_n(m)} = (m - \mathbf{m_1})(m - \mathbf{m_2})(m - \mathbf{m_3})^3(m^2 - 2\alpha 1 m + \alpha 1^2 + \beta^2 1)(m^2 - 2\alpha 2^2 m + \alpha 2^2 + \beta 2^2)^2$

La solución general:
$y = C_1 e^{m1x} + C_2 2e^{m2x} + C_3 e^{m3x} + C_4 x e^{m3x} + C_5 x^2 e^{m3x} + C_6 e^{\alpha 1x} \cos \beta 1x + C_7 e^{\alpha 1x} sen\ \beta 1x + C_8 e^{\alpha 2x} \cos \beta 2x + C_9 e^{\alpha 2x} sen\ \beta 2x + C_{10} x e^{\alpha 2x} \cos \beta 2x + C_{11} x e^{\alpha 2x} sen\ \beta 2x$

Ejemplo: $2\frac{d^5y}{dx^5} - 7\frac{d^4y}{dx^4} + 12\frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Reemplazo en cada $\mathbf{d^i y/dx^i}$ por $\mathbf{m^i}$:
$2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = m^2(2m + 1)(m^2 - 4m + 8) = 0$
Las raíces son: $\mathbf{m_1} = 0$ con multiplicidad 2, $\mathbf{m_2} = -1/2 \rightarrow \mathbf{M_{3,4}} = (4 \pm \sqrt{16 - 32})/2 = (4 + 4i)/2 = 2 \pm 2i \rightarrow \alpha = 2, \beta = 2$
Para el factor $\mathbf{m^2}$, como el grado es **2**, empezamos con la solución básica $\mathbf{e^{0x}}$ y luego multiplicamos por **x** y así sucesivamente.
O sea que las soluciones serian: $\mathbf{e^{0x} = 1}$, $\mathbf{xe^{0x} = x}$

Para **2m−1** la solución es: $\mathbf{e^{-x2}}$ y para $\mathbf{m^2 - 4m + 8}$ las soluciones serian: $\mathbf{e^{2x} \cos 2x}$, $\mathbf{e^{2x}\ sen\ 2x}$.
Solución general: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x/2} + C_4 e^{2x} \cos(2x) + C_5 e^{2x} sen\ (2x)$

ECUACIONES LINEALES: MODELADO

APLICACIÓN: SERIES RADIACTIVAS

Una sustancia se desintegra por radiactividad, transmuta en un solo paso a una sustancia estable, y la 1ra sustancia se trasforma en una sustancia radiactiva, que a su vez forma una 3ra sustancia, etc. Este proceso que se conoce como **serie de decaimiento radiactivo** continua hasta que llega a un elemento estable.

Ejemplo: La serie de decaimiento del uranio es U-238→Th-234→Pb-206, donde Pb-206 es un isótopo estable de plomo. La vidas medias de los distintos elementos de una serie radiactiva pueden variar de millones de años ($4.5*10^9$ años para U-238) a una fracción en segundo.
Si: x(t), y(t) y z(t) son cantidades de sustancias X, Y y Z, respectivamente que quedan en el tiempo t.

- La desintegración del elemento Z se describe mediante: $\frac{dx}{dt}=-\lambda_1 x$
- La rapidez a la que se desintegra el 2do elemento Y es rapidez neta: $\frac{dy}{dt}=\lambda_1 x-\lambda_2 y$, Y esta ganando átomos de la desintegración de X y al mismo tiempo pierde átomos por su propia desintegración.
- Como Z es elemento estable, gana átomos de la desintegración del elemento Y: $\frac{dz}{dt}=\lambda_2 y$.

Un modelo de la serie de decaimiento radiactivo para los tres elementos es el sistema lineal de tres ED de primer orden

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda_1 x \quad ; \quad \frac{dy}{dt}=\lambda_1 x-\lambda_2 y, \quad ; \quad \frac{dz}{dt}=\lambda_2 y. \qquad (2)$$

APLICACIÓN: MODELO PRESA-PREDADOR

Dos especies interactúan dentro de un mismo ambiente o ecosistema, suponga también que una especie es predador de la otra especie. Por ejemplo, los lobos cazan caribúes que se alimentan de pasto, los tiburones devoran peses pequeños.

Sea x(t) e y(t) las poblaciones de zorros y de conejos, respectivamente, en el tiempo t. Si no hubiera conejos, entonces se podría esperar que los zorros, sin un suministro adecuado de alimento disminuirán en número según la ecuación:

$\frac{dx}{dt}=-ax,$ a>0 (4) Sin embargo, cuando hay conejos en el medio, parece razonable que el numero de encuentro de estas dos especies por tiempo unitario sea conjuntamente proporcional a sus poblaciones x e y; es decir, proporcional al producto xy.
Así, cuando están presentes los conejos hay un suministro de alimento y, por consecuencia, los zorros se agregan al sistema en una proporción bxy, b>0. sumando esta ultima proporción a (4) se obtiene un modelo para la población de zorros:

$\frac{dx}{dt}=-ax+bxy$ (5) Por otro lado, si no hay zorros, entonces la población de conejos, con una suposición adicional de suministro ilimitado de alimento, crecería a una taza proporcional al número de conejos presentes en el tiempo t:

$\frac{dy}{dt}=dy,$ d>0 (6) Pero cuando están presentes los zorros, entonces la población de conejos es la ecuación (6) disminuida por cxy, c>0; es decir, la taza a la cual son comidos los conejos durante sus encuentros con los zorros: $\frac{dy}{dt}=dy-cxy.$

Las ecuaciones (5) y (7) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-ax+bxy=x(-a+by)\\ \frac{dy}{dt}&=dy-cxy=y(d-cx)\end{aligned} \qquad (8)$$

Donde a,b y c: Constantes positivas. Este sistema es el **modelo presa-predador de Lotha-Volterra.**
Excepto por dos soluciones constantes, **x(t) = 0**, **y(t) = 0** y **x(t) = d/c, y(t) = a/b,** el sistema no lineal (8)no se puede resolver en términos de funciones elementales.

APLICACIÓN: MODELOS DE COMPETENCIA

Ahora supongamos que dos especies de animales ocupan el mismo ecosistema, no como predador y presa, sino como competidores de los mismos recursos (como alimento y espacio vital) en el sistema. Ahora suponga que la tasa a la cual crece cada población se determina por medio de:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = cy, \qquad (9)$$

Como las dos especies compiten, otra suposición podría ser que cada una de las tazas se reduzca simplemente por la influencia, o existencia, de la otra población. Así que un modelo para las dos poblaciones se determina mediante el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = ax - dy \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = cy, - dx \qquad (10)$$ donde a, b y c son constantes positivas.

Por otro lado, se podría suponer, como se hizo en (5), que cada taza de crecimiento de (9) debe ser reducida por una taza proporcional al numero de interacciones entra las dos especies:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = cy, - dxy \qquad (11)$$

Por inspección se encuentra que este sistema no lineal es similar al modelo presa-predador. Por ultimo, podría ser mas real remplazar las tareas en (9), lo cual indica que la población de cada especie en aislamiento crece en forma exponencial, con tasas que indican que cada población crece en forma logística (es decir, en un tiempo largo la población se limita):

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 x^2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = a_2 y - b_2 y^2. \qquad (12)$$

Cuando tasas proporcionales al número de interacciones disminuyen a estas nuevas tasas, se obtiene otro modelo no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy = x(a_1 - b_1 x - c_1 y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy = y(a_2 - b_2 y - c_2 x), \end{aligned} \qquad (13)$$

Los coeficientes son positivos y el sistema lineal (10) y los sistemas no lineales (11) y (13)se llaman **modelos de competencia**.

APLICACIÓN: REDES ELECTRICAS

La red eléctrica que tiene más de una malla da lugar a ecuaciones diferenciales simultaneas. La corriente i_1(t) se divide en las direcciones en el punto B_1, llamado punto de ramificación de la red.

- Según la 1ra ley de Kirchhoff, se puede escribir: $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ (14)
- Según la 2da ley de Kirchhoff para la malla $A_1B_1A_2B_2A_1$, suponiendo que el voltaje disminuye en cada parte del circuito: $E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2.$ (15)
- De modo similar, para $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ resulta: $E(t) = i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}.$ (16)

Para eliminar i_1 en (15) y (16) en (14) se obtiene 2 ecuaciones lineales de 1er orden para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$:

$$\begin{aligned} L_1\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 &= E(t) \\ L_2\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 &= E(t). \end{aligned} \qquad (17)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sabemos que **$dy/dx + ay = 0$** es lineal de primer orden, donde **$p(x) = a$**.

Factor de integración: $e^{\int a dx} = e^{ax}$ y su solución es: $ye^{ax} = C$; de donde: $y = Ce^{-ax}$

Por similitud con EDO de 1er orden y coeficientes constantes, suponemos que la ED lineal de 2do orden y coeficientes constantes: **$ay'' + by' + cy = 0$** (*), tiene solución exponencial: **$y = e^{mx}$**.

- Derivando dos veces se tiene: $y' = me^{mx}$, $y'' = m2e^{mx}$
- Sustituyendo en la E.D. (*): $am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ luego $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$
- Así: **$am^2 + bm + c = 0$** es ecuación característica o ecuación auxiliar de la E.D.: **$ay'' + by' + cy = 0$**

Con las raíces de la ecuación característica suceden tres casos:
1. Que tenga raíces reales y diferentes.
2. Que tenga raíces reales e iguales.
3. Que tenga raíces complejas conjugadas.

Caso 1. RAÍCES REALES Y DIFERENTES

Si las raíces son m1 y m2, con m1 =/= m2, luego $y1 = e^{m1x}$ y $y2 = e^{m2x}$ son linealmente independientes, por tanto la solución general es: **$y = C1e^{m1x} + C2e^{m2x}$.**

Ejemplo: Para hallar la solución general de $2y'' - 5y' - 3y = 0$

La ecuación característica: $2m^2 - 5m - 3 = 0$

$.m = \dfrac{\sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5+-7}{4}$ luego m1= 3 – m2 = -1/2 La solución general es $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-1/2x}$

Caso 2. RAÍCES REALES E IGUALES:

Las raíces son de multiplicidad dos. Sea m (con multiplicidad 2) $\Rightarrow y1 = e^{mx}$ es una solución.
Por el método de D'Alambert para hallar la segunda solución de $ay'' + by' + cy = 0$, dividiendo por a para conseguir la forma canónica, se tiene

$y'' + b/a y' + c/a y = 0.$ $\rightarrow$ $Y2 = Y1\int \dfrac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx = e^{mx}\int \dfrac{e^{-\int b/a dx}}{e^{(2mx)}}dx$

como $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow am^2 + bm + c = 0$ (ecuación característica) y sus raíces son m1,2 = $-b\pm\sqrt{b^2-4ac}/2a$; pero como las raíces son iguales, entonces el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, por lo tanto m1,2 = m = – b/2a ,

luego: $\int \dfrac{e^{-\int b/a dx}}{e^{(2b/2ax)}}dx \rightarrow Y2 = e^{mx}\int dx = xe^{mx}$ luego la solución general es: $y = C1e^{mx} + C2xe^{mx}$

Ejemplo: $4y'' - 4y' + y = 0$ Hallar la solución general.
Solución: Ecuación característica: $4m^2 - 4m + 1 = 0 = (2m - 1)^2 = 0$ por lo tanto, m = 1/2 (con multiplicidad 2)
La solución general es: $y = C1e^{x/2} + C2xe^{x/2}$

Caso 3. RAÍCES COMPLEJAS Y CONJUGADAS

Supongamos que m1 = α + βi es una raíz de la ecuación auxiliar y por tanto su conjugada m2 = α − βi es la otra raíz, donde α es la parte real y β es la parte imaginaria; recordando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta$ (Fórmula de Euler) entonces la solución general es:

- $y = C1e^{(\alpha+\beta i)x} + C2e^{(\alpha-\beta i)} = C1e^{\alpha x}e^{\beta ix} + C2e^{\alpha x}e^{-\beta ix}$
- $y = e^{\alpha x}(C1e^{\beta ix} + C2e^{-\beta ix}) = e^{\alpha x}[(C1 + C2)\cos\beta x + i(C1 - C2)\ \mathrm{sen}\ \beta x]$
- $y = e^{\alpha x}[K1\cos\beta x + K2\ \mathrm{sen}\ \beta x]$

En resumen: $y = K_1e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2e^{\alpha x}sen\beta x$ es solución general

Ejemplo: Hallar la solución general de: $y'' - 2y' + 3y = 0$

Su ecuación característica es: $m^2 - 2m + 3 = 0$

$$m = \frac{2\pm\sqrt{4-(4\times3)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-8}}{2} = \frac{2}{2}\pm\frac{2\sqrt{2i}}{2} = 1\pm\sqrt{2i} \qquad \alpha = 1\ ,\ \beta = \sqrt{2i}$$

La solución general es:

$$y = K_1e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2e^{\alpha x}sen\beta x$$

$$y = K_1e^{x}\cos\sqrt{2}x + K_2e^{x}sen\sqrt{2}x$$

Ejemplo: Hallar la solución general de: y´´ - y´ + y = 0

Su ecuación característica es: $m^2 - m + 1 = 0$

$$m = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3i}}{2} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\ ,\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = K_1e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2e^{\alpha x}sen\beta x$$

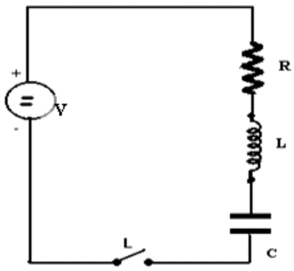
La solución general es:

$$y = K_1e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2e^{\frac{x}{2}}sen\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

APLICACIÓN: CIRCUITOS RCL EN SERIE con corriente continua

La **corriente continua**, conectada a un circuito circula con un valor constante en un sentido. Desde el punto de vista del movimiento de las cargas negativas o electrones esta será de negativo a positivo.

La **corriente alterna** varia su valor entre 0 y un valor máximo determinado, luego disminuye hasta llegar nuevamente a 0. Cambia el sentido de circulación aumentando desde 0 hasta llegar hasta su valor máximo determinado y nuevamente decrece hasta llegar a cero para cambiar nuevamente de sentido.



Al cerrar la llave L en el instante t = 0, la intensidad i, en función del tiempo, será cero ya que la inductancia en ese instante ha de actuar como una llave abierta o una resistencia de valor infinito, cayendo la tensión de la fuente en ella.

Cuando el tiempo tienda a infinito la intensidad i, función del tiempo, también será cero ya que el capacitor actuará como una llave abierta, cayendo en él toda la tensión de la fuente.

En el régimen transitorio, y en él, las caídas de tensión en cada elemento serán:

$v_r = i.R$ $\quad v_L = L.\frac{di}{dt}$ $\quad v_c = \frac{1}{C}\int i.dt$ Por la **ley de las mallas de Kirchoff** al circuito RLC, resulta:

$i.R + L.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}.\int i.dt = V$ derivando → $R.\frac{di}{dt} + L.\frac{d^2 i}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

Reordeno y divido en L: $\frac{d^2 i}{dt} + \frac{R}{L}.\frac{di}{dt} + \frac{i}{C.L} = 0$ → $i'' + \frac{R}{L}.i' + \frac{1}{CL}.i = 0$, que es una **ecuación lineal homogénea de 2º orden con coeficientes constantes**, que resuelvo con la ecuación cuadrática

$r^2 + \frac{R}{L}.r + \frac{1}{CL} = 0 \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ reemplazando: $r_{1,2} = -\frac{\frac{R}{L}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4.\frac{1}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

separando variables: $A = -\frac{R}{2L}$ y $B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$, luego: $r_1 = A + B$ y $r_2 = A - B$

Se presentan los tres casos que dependen del valor del discriminante:

Caso I] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$ B > 0 entonces r1 y r2 raíces reales y distintas.

Solución: $i(t) = C_1.e^{r_1 t} + C_2.e^{r_2 t}$ Para determinar las constantes usamos las condiciones iniciales:

a. en t = 0 el valor de i = 0
b. en t = 0 la tensión de la fuente cae en la inductancia

- De a: $0 = C_1 + C_2$ es decir: $C_1 = -C_2$ **(a)**
- De b: $V = L.\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = L.\frac{d(C_1.e^{r_1 t} + C_2.e^{r_2 t})}{dt}\Big|_{t=0}$ $\quad V = L.(C_1.r_1 + C_2.r_2)$ **(b)**

(a) y **(b)** forman un sistema de ecuaciones que nos permitirá determinar el valor de las constantes, por ejemplo en **(b)** reemplazamos C1 por –C2 y hallamos C2 y luego con **(a)** hallamos C1.

Caso II] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$ B = 0 entonces r1 y r2 raíces reales e iguales.

Solución: $i(t) = C_1.e^{r_1 t} + C_2.t.e^{r_2 t}$, donde para determinar las constantes aplicamos las condiciones iniciales de la misma forma que en el caso I.

Caso III] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ B < 0 entonces r1 y r2 raíces complejas conjugadas.

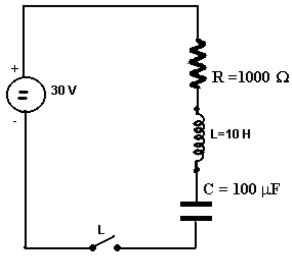
Solución: $i(t) = e^{At}.(K_1.\cos Bt + K_2.senBt)$ Para determinar las constantes usamos las condiciones iniciales como en el caso I.

Regímenes transitorios para el circuito RLC

Basaremos la resolución en lo desarrollado en el punto anterior.

Caso I] Sea el siguiente circuito:

$$A = -\frac{R}{2L} = -\frac{1000\Omega}{2.10H} = -50 \qquad B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{1000\Omega}{2.10H}\right)^2 - \frac{1}{10H.100.10^{-6}F}} = 38{,}73$$



B > 0 entonces r1 y r2 raíces reales y distintas

$r_1 = A + B = -50 + 38{,}73 = -11{,}27$ y $r_2 = A - B = -50 - 38{,}73 = -88{,}73$

Reemplazo → los valores obtenidos r1 y r2 $i(t) = C_1.e^{r_1 t} + C_2.e^{r_2 t} = C_1.e^{-11{,}27t} + C_2.e^{-88{,}73t}$ **(1)**

Aplico Condiciones iniciales: para t = 0 la i = 0 y V = vL, reemplazando en **(1)**: $0 = C_1 + C_2$ es decir $C_1 = -C_2$

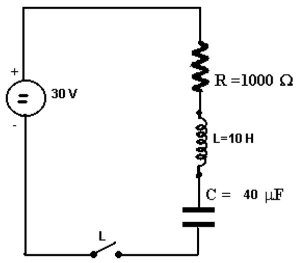
$$V = L.(C_1.r_1 + C_2.r_2) = 10[C_1.(-11{,}27) + C_2.(-88{,}73)] = 30V \qquad -11{,}27.C_1 - 88{,}73.C_2 = 3$$

reemplazando $C_1 = -C_2$ $11{,}27.C_2 - 88{,}73.C_2 = 3$ $C_2 = -0{,}03873$ y $C_1 = 0{,}03873$ →

con lo que: $i(t) = 0{,}03873.e^{-11{,}27t} - 0{,}03873.e^{-88{,}73t}$

Caso II] Sea el siguiente circuito:

$$A = -\frac{R}{2L} = -\frac{1000\Omega}{2.10H} = -50 \qquad B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{1000\Omega}{2*10H}\right)^2 - \frac{1}{10H.40.10^{-6}F}} = 0$$



B = 0 entonces r1 y r2 raíces reales e iguales

$r_1 = A + B = -50 + 0 = -50$ y $r_2 = A - B = -50 - 0 = -50$

$i(t) = C_1.e^{r_1 t} + C_2.t.e^{r_2 t} = C_1.e^{-50t} + C_2.t.e^{-50t}$ **(2)**

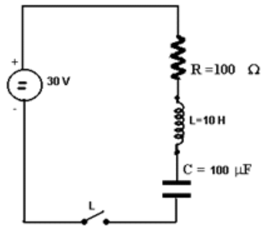
Condiciones iniciales: para t = 0 la i = 0 y V = vL reemplazando en **(2)**: $0 = C_1 + C_2$.0 es decir $C_1 = 0$

$$V = L.\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} = L.\frac{d(C_1\ .e^{r_1t} + C_2.t.e^{r_2t})}{dt}\bigg|_{t=0} = L.(C_1.r_1.e^{r_1t} + C_2.e^{r_2t} + C_2.t.r_2.e^{r_2t})\big|_{t=0}$$

$30V = 10.C_2$ $C_2 = 3$ y $C_1 = 0$ con lo que: $i(t) = 3.t.e^{-50t}$

Caso III] Sea el siguiente circuito:

$$A = -\frac{R}{2L} = -\frac{100\Omega}{2.10H} = -5 \qquad B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{100\Omega}{2*10H}\right)^2 - \frac{1}{10H.100.10^{-6}F}} = \pm j31{,}22$$



B < 0 entonces r1 y r2 raíces complejas conjugadas

$r_1 = A + B = -5 + j31{,}22$ y $r_2 = A - B = -5 - j31{,}22$

$$i(t) = e^{At}.(K_1.\cos Bt + K_2.senBt) = e^{-5t}.(K_1.\cos 31{,}22t + K_2.sen31{,}22t) \quad \textbf{(3)}$$

Condiciones iniciales: para t = 0 la i = 0 y V = vL reemplazando en **(3)**: $0 = K_1 + K_2.0$ es decir $K_1 = 0$

$$V = L.\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} = L.\frac{de^{-5t}.(K_1.\cos 31{,}22t + K_2.sen31{,}22t)}{dt}\bigg|_{t=0} =$$

$$= L\left[-5.e^{-5t}.(K_1.\cos 31{,}22t + K_2.sen31{,}22t) + e^{-5t}.(-31{,}22K_1.sen31{,}22t + 31{,}22K_2.\cos 31{,}22t)\right]_{t=0} =$$

$$= L[-5.1.(0.1 + K_2.0) + 1.(-31{,}22.0.0 + 31{,}22K_2.1]] = 10.31{,}22.K_2 = 30V$$

$.K_2 = 0{,}0961$ con lo que: $i(t) = 0{,}0961.e^{-5t}.sen31{,}22t$

- **Solución general**: $y = e^{-100t}.\left[\left[-2600\left[\frac{t.e^{100t}}{20} - \frac{e^{100t}}{20}\right]\right] - \left[1000\left[\frac{e^{100t}(60sen(60t) + 20\cos(60t))}{4000}\right]\right] + C\right]$
- **Solución particular:** $y = e^{-100}.\left[\left[-2600\left[\frac{e^{100}}{20} - \frac{e^{100}}{20}\right]\right] - \left[1000\left[\frac{e^{100}(60sen(60) + 20\cos(60))}{4000}\right]\right]\right]$

ECUACION CAUCHY - EULER

Es una ecuación diferencial de la forma: $a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes, se conoce como ecuación de Cauchy-Euler. La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de diferenciación $d^k y / dx^k$ Las formas de soluciones generales de la ecuación:

- Homogénea de segundo orden: $ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$
- No homogénea $ax^2 y'' + bxy' + cy = g(x)$

MÉTODO DE SOLUCIÓN Se prueba una solución de la forma $y = x^m$, donde m es un valor a determinar. Análogo a cuando se sustituye e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuando se sustituye x^m, cada término de la ecuación de Cauchy-Euler se convierte en un polinomio en m multiplicado por x^m, puesto que

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k} = a_k m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^m$$

Por ejemplo, cuando se sustituye $y = x^m$ la ecuación de segundo orden se transforma en

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = (am(m-1) + bm + c)x^m$$

Así, $y = x^m$ es solución de la ecuación siempre que m sea una solución de la **ecuación auxiliar**

$am(m-1) + bm + c = 0$, **o bien**, $am^2 + (b-a)m + c = 0$ (1)

Según las raíces de esta ecuación cuadrática, hay 3 casos:

- I - Si son **reales y distintas**
- II - Si son **reales e iguales**
- III - Si son **complejas**

CASO I: RAÍCES REALES Y DISTINTAS

Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1), con $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por consiguiente, la solución general es

$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$ (2)

EJEMPLO: Raíces distintas $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$

Suponiendo $y = x^m$ como la solución para entender el caso. Diferencio dos veces,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

y se sustituye en la ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} - 2x \cdot mx^{m-1} - 4x^m$$

$$= x^m(m(m-1) - 2m - 4) = x^m(m^2 - 3m - 4) = 0$$

Si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Ahora $(m+1)(m-4) = 0 \rightarrow m_1 = -1, \ m_2 = 4$, luego $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$.

CASO II: RAÍCES REALES REPETIDAS

Si las raíces de (1) son repetidas (es decir, $m_1 = m_2$), entonces se obtiene sólo una solución, a saber, $y = x^m$. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática $am^2 + (b-a)m + c = 0$ son iguales, el discriminante de los coeficientes necesariamente es cero. De la fórmula cuadrática se deduce que las raíces deben ser $m_1 = -(b-a)/2a$.

Una 2da solución y_2. Se escribe la ecuación de Cauchy-Euler en forma estándar: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0$

Hacer las identificaciones $P(x) = b/ax$ y $\int (b/ax)dx = (b/a)\ln x$. Así: $y_2 = x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}dx$

Operando: $y_2 = x^{m_1}\int \frac{dx}{x} = x^{m_1}\ln x$. La solución general es: $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}\ln x$. (3)

EJEMPLO: **Raíces repetidas** $4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$, donde la sustitución $y = x^m$ produce

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1) = x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

donde $4m^2 + 4m + 1 = 0$, o bien, $(2m+1)^2 = 0$. Porque $m_1 = -\frac{1}{2}$, la solución general: $y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1/2}\ln x$.

CASO III: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si las raíces de (1) son el par conjugado $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución es: $y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de las ecuaciones con coeficientes constantes, se desea escribir la solución sólo en términos de funciones reales. Se nota la identidad

$$x^{i\beta} = \left(e^{\ln x}\right)^{i\beta} = e^{i\beta\ln x}$$

Que, por la fórmula de Euler, es lo mismo que: $x^{i\beta} = \cos(\beta\ln x) + i\,sen(\beta\ln x)$

De modo similar $x^{-i\beta} = \cos(\beta\ln x) - i\,sen(\beta\ln x)$

Operando llegamos a la solución general: $y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2 sen(\beta\ln x)]$ (4)

EJEMPLO – Problema de valor inicial

$$4x^2y'' + 17y = 0,\quad y(1) = -1,\quad y'(1) = -\frac{1}{2}$$

El término y' falta en la ecuación de Cauchy-Euler del problema; pero, la sustitución $y = x^m$ produce

$$4x^2y'' + 17y = x^m(4m(m-1) + 17) = x^m(4m^2 - 4m + 17) = 0$$

Donde $4m^2 - 4m + 17 = 0$. Se encuentra que las raíces son $m_1 = \frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = \frac{1}{2} - 2i$.

Con las identificaciones $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 2$, se ve de (4) que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = x^{1/2}[c_1\cos(2\ln x) + c_2 sen(2\ln x)]$$

Aplicando las condiciones iniciales $y(1) = -1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$ a la solución anterior y usar $\ln 1 = 0$, se encuentra que $c_1 = -1$ y $c_2 = 0$. La solución del problema de valor inicial es $y = -x^{1/2}\cos(2\ln x)$.

APLICACIÓN: MECANICA CELESTE

La mecánica celeste es la rama de la ciencia que estudia el movimiento de cuerpos celestes usando leyes de la física.

Isaac Newton da una base de física para explicar el movimiento de los planetas en torno al sol y de la luna en torno a la Tierra. Luego, Leonhard Euler, con arreglos posteriores de Lagrange y Laplace, introduce las técnicas del análisis matemático en la dinámica newtoniana, así, el estudio del movimiento de cuerpos celestes permite obtener de ecuaciones diferenciales y resolverlas.

Aunque las ecuaciones diferenciales que permiten describir el movimiento de n partículas materiales para modelar por el ejemplo el sistema solar, la luna alrededor de la Tierra, o las lunas de los grandes planetas, no posean solución analítica general, ello no impidió que con métodos perturbativos se estudiaran dichos sistemas por aproximaciones aun a costa de un trabajo que podría tardar años en llevarse a cabo.

Puesto de otra forma: aunque problemas de tres o más cuerpos no tengan una solución analítica cerrada y compacta, siempre es posible apelar a las soluciones aproximadas para prácticamente cualquier grado de exactitud. La suma de los centenares o miles de términos de las series que aparecen en estas soluciones aproximadas dan una respuesta aproximada para un rango de aplicaciones realistas.

Recordemos que una serie de potencias en (x - a), tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_o\,(x-a)^o + c_1\,(x-a)^1 + c_2\,(x-a)^2 + \ldots + c_n\,(x-a)^n + \ldots \quad [1]$$

Si x es un número particular, esta serie se convierte en una serie infinita de términos constantes.

Si a = 0, la serie se transforma en serie de potencias en x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_o\,(x)^o + c_1\,(x)^1 + c_2\,(x)^2 + \ldots + c_n\,(x)^n + \ldots = c_o + c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

ECUACIÓN DE LEGENDRE

Es la ecuación diferencial que en su forma canónica tiene el formato:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad [1],$$

Esta ecuación es:

- Diferencial ordinaria, porque existe una sola variable dependiente (y) en función de una sola variable independiente (x).
- Lineal, ya que la función ni sus derivadas están elevadas o otra potencia distintas de cero o uno.
- De segundo orden. Donde:
  - α: Es un numero real
  - x_o: Es un punto ordinario
  - $x = \pm 1$ Son puntos singulares, que definen dos soluciones linealmente independientes, cuya solución general en serie de potencias convergente para todo $|x| > 1$

Sustituyendo $y = \sum c_m x^m$ en **[1]** resulta la **formula de recurrencia**: $c_{m+2} = \dfrac{(\alpha-m)(\alpha+m+1)}{(m+1)(m+2)} c_m$ **[2]**, para **$m \geq 0$**.

En función de las constantes arbitrarias c_o y c_1, en la formula $c_{m+2} = \dfrac{(\alpha-m)(\alpha+m+1)}{(m+1)(m+2)} c_m$ genera:

- Para m = 0: → $c_2 = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!} c_0,$
- Para m = 1: → $c_3 = -\dfrac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} c_1,$
- Para m = 2: → $c_4 = \dfrac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} c_0,$
- Para m = 3: → $c_5 = \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} c_1$
- Para m > 0: → $c_{2m} = (-1)^m \dfrac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)...(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)}{(2m)!} c_0$ **[3]**

Luego: $c_{2m+1} = (-1)^m \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2m)}{(2m+1)!} c_{1.}$ **[4]**

Alternativamente: $c_{2m} = (-1)^m a_{2m} c_0$ y $c_{2m+1} = (-1)^m a_{2m+1} c_1$, donde a_{2m} y a_{2m+1} denotan las fracciones de las (3) y (4).

Para la ecuación de Legendre de orden α, dos soluciones en serie de potencias linealmente independientes:

$$y_1 = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m} \quad \text{y} \quad y_2 = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1} \quad [5]$$

Suponemos que: α = n es un entero no negativo.

- Si α = n es par, vemos en la ecuación (3) que $a_{2m} = 0$ cuando x^n. Para este caso **y_1** es un polinomio de grado **n** y **y_2** es una serie.
- Si α = n es impar, vemos en la ecuación (3) que $a_{2m+1} = 0$ cuando $2m+1 > n$. Para este caso **y_2** es un polinomio de grado n y **y_1** es otra serie.

Con una selección apropiada, hecha por separado para cada n, de la constante arbitraria **c_o** (n par) o **c_1** (n impar), la solución polinomial de grado n de la ecuación de Legendre de orden n:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad [6]$$

Se denota con: **P_n**(x) y se denomina **Polinomio de Legendre** de grado n.

Si la constante del coeficiente de x^n en $\mathbf{P}_n(x)$ es: $\dfrac{(2n).!}{2^n (n!)^2}$, resulta: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$ (7);

Los seis primeros polinomios de Legendre son:

- $P_0(x) = 1$ $\quad P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $\quad P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- $P_4(x) = \dfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ $\quad P_5(x) = \dfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Ejemplo: Verificar a partir de la ecuación diferencial de Legendre que $\int_{-1}^{1} P_n dx = 0$; para n > 0

Solución: Partiendo de la ecuación diferencial e integrando en [-1, 1] → $\left[(1-x^2)y'\right]' + n(n+1)y = 0$

$(1-x^2)P_n'\Big|_{-1}^{1} = -n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n$ → Para $n \rangle 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P_n = 0$

Siendo $P_0 = 1$ una función de la sucesión ortogonal: $\{P_n(x)\} / P(x) = 1$, [-1, 1], luego: $\int_{-1}^{1} P_0 P_n = \int_{-1}^{1} P_n = 0$

Ejemplo: Desarrollar en serie de Fourier-Legendre la función $|x|$ en $x \in [-1,1]$: $c_n = \dfrac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} |x| P_n$

Solución: El coeficiente c_n será

$$n = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2} 2\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$n \rangle 0 \Rightarrow 2c_n = (2n+1)\int_{-1}^{1} |x| P_n \xrightarrow{n=2k+1} = 0 \Rightarrow c_{2k+1} = 0$$

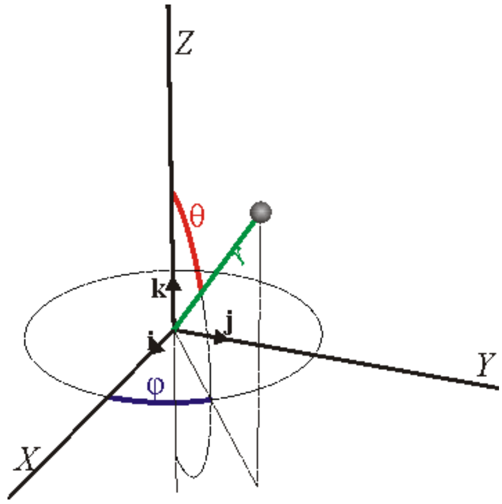
$$\xrightarrow{2k} = (4k+1)2\int_0^1 x P_{2k} dx \Rightarrow c_{2k} \frac{2k+1}{2k+2} P_{2k}(0) + P_{2k-2}(0)$$

C_0	C_2	C_4	C_6	C_8
	$\frac{3}{4}$ $P_2(0) + P_0(0)$	$\frac{5}{6}$ $P_4(0) + P_2(0)$	$\frac{7}{8}$ $P_6(0) + P_4(0)$	$\frac{9}{10}$ $P_8(0) + P_6(0)$
	$\left[\frac{3}{4}\left(\frac{-1}{2}\right) + 1\right]$	$\left[\frac{5}{6}\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{-1}{2}\right]$	$\left[\frac{7}{8}\left(\frac{-5}{16}\right) + \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{9}{10}\left(\frac{35}{128}\right) + \frac{-5}{16}\right]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{13}{128}$	$\frac{-17}{256}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} P_2(x) - \frac{3}{16} P_4(x) \frac{13}{128} P_6(x) - \frac{17}{256} P_8(x) + ...$$

APLICACIÓN: ECUACIÓN DE LEGENDRE Y LAS COORDENADAS ESFERICAS

Las coordenadas esféricas constituyen otra generalización de las coordenadas polares del plano, a base de girarlas alrededor de un eje. Definición:



- La coordenada *radial* r: distancia al origen
- La coordenada *polar* θ: ángulo que el vector de posición forma con el eje Z.
- La coordenada *acimutal* φ: ángulo que la proyección sobre el plano XY forma con el eje X.

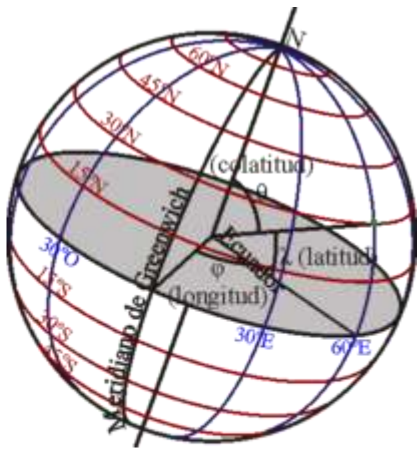
Los rangos de variación de estas coordenadas son:

$$r \in [0, \infty) \qquad \theta \in [0, \pi] \qquad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

El ángulo φ puede variar en el intervalo [0,2π).

1.1 $r$es siempre positiva: La coordenada radial es una distancia siempre positiva. Si, partiendo de un punto P, vamos reduciendo el valor de r, al atravesar el origen de coordenadas $r$vuelve a aumentar. Lo que cambian son los valores de θ, que pasa a valer $\pi - \theta$(¿Por qué?) y φ, que pasa a ser $\varphi \pm \pi$(¿Por qué?).

1.2 θvale πcomo mucho, no 2π: Es un error común el suponer que θllega hasta 2π, como φ. Hay que recordar que ambas coordenadas tienen significados geométricos muy diferentes. φequivale a la longitud geográfica, mientras que θes el complementario de la latitud.



El valor $\theta = 0$ corresponde al Polo Norte. Aumentando θ, vamosr hacia al sur. El Polo Sur es $\theta = \pi$. Y es lo máximo a lo que podemos llegar. No se puede viajar al sur del Polo Sur. Si siguiéramos recorriendo la superficie terrestre lo que estaríamos haciendo es ya volver hacia el norte, lo que supone reducir θ. Al pasar por el Polo Sur, la longitud φcambia a $\varphi \pm \pi$

Para identificar un punto de la superficie terrestre indicamos su latitud y su longitud.

Latitud es altura respecto al ecuador. Este ángulo es complementario de la coordenada polar θ (se llama también *colatitud*). La latitud, en lugar de variar de 0(en el Polo Norte) a π(en el Polo Sur) lo hace desde $90°$a $-90°$.

Longitud es la distancia angular respecto a un meridiano fijo (el de Greenwich). Equivale a la coordenada acimutal φ.

La coordenada radial corresponde a la distancia al centro de la Tierra. La altitud $z$de un punto de la superficie equivale al valor de $r = z + R_T$con $R_T$el radio de la Tierra (suponiendo ésta una esfera, lo que es solo una aproximación).

Para situar las estrellas en el firmamento también es preciso emplear coordenadas esféricas. Existen varias posibilidades, siendo la más usada la formada por la ascensión recta y la declinación.

La declinación es el equivalente de la latitud, medida en este caso respecto al ecuador celeste y la ascensión recta corresponde a la longitud, medida desde un punto de referencia conocido como punto vernal (o punto Aries).

La coordenada radial sería la distancia a la cual se encuentran las estrellas respecto de la Tierra.

ECUACIÓN DE LEGENDRE EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Se realiza el reemplazo: $x = \cos\theta$

Por tanto: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \Leftrightarrow y''_{\theta\theta} + \cot g\theta y'\theta + \lambda y = 0$, donde $\lambda = \alpha(\alpha+1)$

Demostración: Partiendo de la ecuación de Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

Cambiando de variable $x = \cos\theta$, obtenemos:

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{y'_\theta}{-\sin\theta}$$

$$y''_{xx} = \left[\frac{y''_{\theta\theta}}{-\sin\theta} + \frac{y'_\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right]\left[\frac{1}{-\sin\theta}\right]$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación diferencial resulta:

$$\sin^2\theta\left[\frac{y''_{\theta\theta}}{\sin^2\theta} - \frac{y'_\theta}{\sin^3\theta}\cos\theta\right] - 2\cos\theta\left[\frac{y'_\theta}{-\sin\theta}\right] + \lambda y = 0$$

$y''_{\theta\theta} + \cot g\theta y'_\theta + \lambda y = 0$: Ecuación diferencial modificada o transformada a coordenadas esféricas

Ejercicio: Calcular $p'_n(0)$ Para $n = 0$ $p'_0(0) = 0$

Para $n > 0$ una forma de calcular $p'_n(0)$ es a partir de la ecuación diferencial de Legendre

$\left[(1-x^2)y'\right]' + n(n+1)y = 0$ Integrando en $[0\,1]$ $(1-x^2)p'_n \,\Big|_0^1 = -n(n+1)\int_0^1 p_n$

$$-p'_n(0) = -n(n+1)\int_0^1 p_n$$

$$p'_n(0) = -n(n+1)\int_0^1 p_n dx \xrightarrow{n=2k} = 0$$

$$\xrightarrow{n=2k+1} = p_{2k}(0)(2k+1)(2k+2)\left[\frac{1}{2k+2}\right] = p_{2k}(0)(2k+1)$$

Los Polinomios de Legendre son uno de los ejemplos más importantes de los Polinomios Ortogonales, porque aparecen como soluciones en varios problemas clásicos de la física como:

1.- Movimiento de los planetas: Ecuación de Kepler.

2.- Resolución de modelos de la física con Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDDP) en coordenadas esféricas.

Son ejemplo de estos modelos de la física, los campos conservativos, no conservativos, propagación de calor, propagación de ondas, propagación de señales telegráficas, propagación de ondas de partículas simples, etc.

APLICACIÓN: POTENCIAL ELECTRICO

El potencial eléctrico en un punto es el trabajo que debe realizar una fuerza eléctrica para mover una carga positiva q desde la referencia hasta ese punto, dividido por unidad de carga de prueba.

Energía potencial por unidad de carga: $\mathbf{v_p = u_p / q_0}$

Potencial para una carga puntual: $\mathbf{v = k\,(q / r)}$ Donde: $k = \dfrac{1}{4\pi \in_0} = 8.99\times 10^9 \,\dfrac{N\cdot m^2}{c^2}$

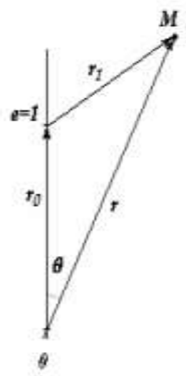
$\in_0$: Constante de permitividad del vacío y $\dfrac{N\cdot m^2}{c^2} = \dfrac{newton\cdot metro^2}{coloumb^2}$

El Potencial Eléctrico en un punto es el trabajo que debe realizar una fuerza eléctrica (ley de Coulomb) para mover una carga unitaria **q** desde ese punto hasta el infinito, donde el potencial es cero. Dicho de otra forma es el trabajo que debe realizar una fuerza externa para traer una carga unitaria **q** desde el infinito hasta el punto considerado en contra de la fuerza eléctrica.

Utilizando la ecuación de Legendre y los polinomios de Legendre en coordenadas esféricas se puede obtener una formula para expresar el potencial eléctrico en una carga puntual.

Potencial en un punto de coordenadas: $M = (r, \varphi, \theta)$

Sea una carga puntual unitaria situada en el punto con coordenadas esféricas (0,0, r_0)



Como $v = \dfrac{e}{r_1}$ para carga eléctrica: $e = 1$

$$v = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{\left(r_0^{\,2} + r^2 - 2r_0 r\cos\theta\right)}}$$

Para desarrollar esta función se presentan dos posibilidades

$r > r_0$ o $r < r_0$

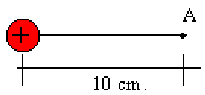
$$v \xrightarrow{r>r_0} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0^{\,2}}{r^2} - 2\frac{r_0}{r}\cos\theta\right)}}$$

$$\xrightarrow{r<r_0} = \frac{1}{r_0}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{r_0^{\,2}} - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta\right)}}$$

Por polinomios de Legendre, la expresión del potencial es:

$$v \xrightarrow{r>r_0} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n p_n(\cos\theta) \qquad \xrightarrow{r<r_0} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n p_n(\cos\theta)$$

Ejemplo: Determinar el valor del potencial eléctrico creado por una carga puntual $\mathbf{q_1 = 12 \times 10^{-9}}$ **C** en un punto ubicado a 10 cm. del mismo como indica la figura.**Solución:** Aplico cálculo del potencial en un punto debido a una carga puntual: V=kQ/r



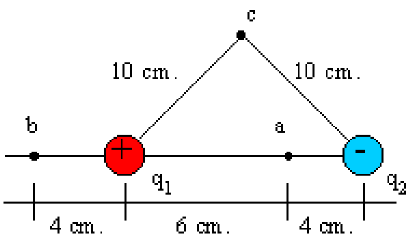
$$V_A = \frac{9.10^9\,\frac{N.m^2}{C^2}.12.10^{-9}C}{0.1\,m} = +1.080\ V$$

Como el potencial es escalar sólo se indica signo y valor numérico.

El potencial en A: + 1.080 V

Ejemplo:

Dos cargas puntuales **q1=12 x 10-9 C** y $\mathbf{q2 = -12 \times 10^{-9}}$ **C** están separadas **10 cm.** como muestra la figura. Calcular la diferencia de potencial entre los puntos **ab**, **bc** y **ac**.



Solución:
Para poder hallar la diferencia de potencial entre puntos, debemos primero hallar el potencial en cada punto debido al sistema de cargas planteado

- **Potencial en punto a:** El potencial en **a** es debido a la acción de dos cargas puntuales **q1** y **q2** por lo tanto deberemos calcular cada uno de dichos potenciales y establecer la diferencia. como el potencial en un punto debido a una carga puntual se calcula como ya vimos en el ejercicio anterior como entonces deberemos repetir este cálculo para cada una de las cargas.

  En consecuencia por lo que como se observa el resultado corresponde a la diferencia entre el potencial positivo creado por la carga q_1 y el potencial negativo creado por la carga q_2. (potencial de q_1= + 1.800 V y potencial de q_2 = - 2.700 V de allí surgen la diferencia que es a favor del potencial positivo en -900 V).

- **Potencial en punto b :** Repetimos lo establecido para el punto a simplemente que ahora debemos calcular las distancias para el punto b por lo que la expresión nos queda como se observa el resultado corresponde a la diferencia entre el potencial positivo creado por la carga q_1 y el potencial negativo creado por la carga q_2. (potencial de q_1= + 2.700 V y potencial de q_2 = - 771 V de allí surgen la diferencia que es a favor del potencial positivo en 1.929 V).

- **Potencial en punto c:** En el punto c no es necesario realizar el cálculo numérico dado que como las distancias entre c y las cargas son iguales y las cargas son iguales y de signos contrarios, los potenciales que provocan son de igual valor y signo opuesto, por lo que el potencial en c vale 0 (V_c=0).

- Cálculo de los potenciales:

  V_{ab}= V_b-V_a= 1.929 V - (-900 V) = **+ 2.829 V**
  V_{bc}= V_c-V_b= 0 V - 1.929 V = **- 1.929 V**
  V_{ac}=V_c-V_a= 0 V - (-900 V) = **+ 900 V**
  Respuesta: **V_{ab} =+ 2.829 V** **V_{bc}=- 1.929 V** **V_{ac}=+ 900 V**

FUNCION LEGENDRE

Las Funciones de Legendre son las soluciones a las Ecuaciones Diferenciales de Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P(x)\right]+n(n+1)P(x)=0.$$

Ejemplos de polinomios de Legendre

<table>
<tr><td rowspan="7">Ecuaciones así llamadas por el francés Adrien-Marie Legendre, usadas en Física y otros campos. Aparecen cuando se resuelve la ecuación de Laplace (un tipo de ecuación en derivadas parciales) en coordenadas esféricas.

La ecuación diferencial de Legendre se resuelve por serie de potencias si converge cuando |x| < 1 y en particular de que n sea un entero no negativo (0, 1, 2,...) las soluciones forman una familia de polinomios ortogonales llamados Polinomios de Legendre.

El polinomio de grado n de Legendre $P_n(x)$ es expresado como:
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$</td><td>N</td><td>$P_n(x)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{1}{2}(3x^2-1)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$</td></tr>
</table>

ECUACIONES DE BESSEL

Tiene la forma: **$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)\, y = 0$** (1), cuya solución son las **Funciones de Bessel de orden P,** con **$P \geq 0$**, que aparecieron para describir las oscilaciones producidas verticalmente por una cadena, pero sus propiedades generales fueron estudiadas más profundamente por Bessel, cuya ecuación de Bessel (1) tiene como condición inicial $r^2 - p^2 = 0$ con raíces $r = \pm P$, sustituyendo $y = \sum C_m X^{m+r}$ en (1) encontramos que C1 =0 y que $\left[(m+r)^2 - P^2\right] C_m + C_{m-2} = 0$ (2) $\forall$ $m \geq 2$

Para $r = P > 0$ sustituyendo $r = P$ y a_m en lugar de c_m la ecuación (2) queda:

$\left[(m+r)^2 - p^2\right] c_m + c_{m-2} = 0$ como $a_m = c_m$ $\rightarrow$ $c_m = -\dfrac{c_{m-2}}{\left[(m+r)^2 - p^2\right]}$; $a_m = -\dfrac{a_{m-2}}{m(2p+m)}$ **(3)**

Si **$a_1 = 0$** ; **$a_m = 0$** $\forall$ m impar:

$\forall$ **m par se tiene**:

- m = 2: $a_2 = \dfrac{-a_0}{4(2p+2)} = \dfrac{a_0}{4(p+1)}$
- m = 4: $a_4 = \dfrac{a^2}{4(2p+4)} = -\dfrac{a_2}{4*2(p+1)*(p+2)}$
- La pauta general es: $a_{2m} = \dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}$ Nota: $m! \neq n!$

Ejemplo: Para: 8! = 8.7.6.5! resulta $(p+1)! = (p+1)(p+2)(p+3)(p+m)!$, con raiz mayor $r = p$ se obtiene: $y_1 = a_0 \sum_{m+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m!(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}$ (4)

Si $p = 0$ ésta será la única solución en serie de Frobenius, con $a_0 = 1$ es la función $J_0(x)$

Para $r = -p < 0$; $m(m-2p) b_m + b_{m-2} = 0$ (5)

Para $m \geq 2$; $b_1 = 0$ Si 2p es un entero positivo, existe una dificultad potencial

Demostración: Si m = 2p la ecuación (5) será: $0 . b_m + b_{m-2} = 0$. Si $b_{m-2} \neq 0$ no satisface la ecuación

Si p es un múltiplo entero impar de 1/2, es decir que p = k/2; k = entero positivo impar; se corrige la dificultad anterior de la ecuación (5), considerando $b_m = 0$ $\forall$ valor impar de m.

Considerando K –ésimo: K (K-K) $b_K + b_{K-2} = 0$, desigualdad que se cumple por: $b_K = b_{K-2} = 0$

Si p no es un entero positivo; $b_m = 0$ para m impar los coeficientes de índice par se definen en términos de b_0 por medio de la fórmula de recurrencia: $b_m = \dfrac{-b_{m-2}}{m(m-2p)}$; $m \geq 2$ (6)

El resultado obtenido en la ecuación 4 es el mismo al comparar la (6) y (3) excepto que p = -p

$$y_2 = b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-p}}{2^{2m} m!(-p+1)(-p+2)\ldots(-p+m)} \qquad (7)$$

y_1 ; y_2 son soluciones linealmente independientes de la Ecuación de Bessel, con p>0

FUNCIONES BESSEL

Definidas por el matemático Daniel Bernoulli y luego generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas y(x) de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0$$

Donde: **α** es un número real o complejo, denominada orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Es común cuando **α** es un entero **n**, aunque la solución para **α** no enteros es similar. Como tal ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden, tiene dos soluciones linealmente independientes.

La Ecuación de Bessel aparece en soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas o esféricas.

Las funciones de Bessel se usan en problemas de propagación de ondas, potenciales estáticos. En sistemas en coordenadas cilíndricas, se obtienen funciones de Bessel de orden entero (α = n) y en problemas en coordenadas esféricas, se logran funciones de Bessel de orden semientero (α = n + 1 / 2), por ejemplo:

- Ondas electromagnéticas en guías de onda cilíndricas.
- Modos transversales electromagnéticos en guías ópticas.
- Conducción del calor en objetos cilíndricos.
- Modos de vibración de una membrana delgada circular (o con forma de anillo).
- Difusión en una red.

FUNCIONES DE BESSEL ORDINARIAS DE ORDEN A:

Funciones de Bessel de orden α

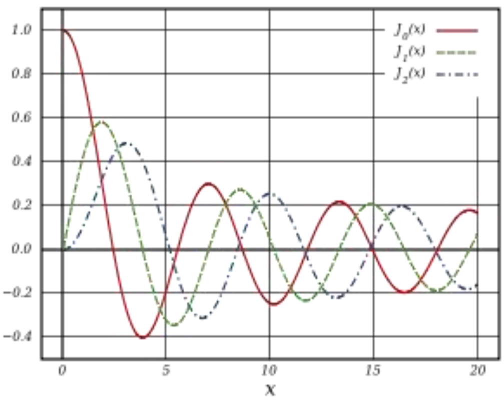
Son soluciones de la ecuación de Bessel (1). Existen dos formas de expresar la solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro **α**, asociadas a las funciones de Bessel ordinarias de 1ra y de 2da especie.

Las funciones de Bessel de primera especie y orden α J_α: Son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen (x = 0) para enteros no negativos α y divergen en el límite $x \to 0$ para α negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Para las soluciones de orden entero es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a x = 0:

$$J_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}=\frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2\alpha+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2\alpha+2)(2\alpha+4)}-\ldots\right]$$

Γ(z) es la función Gamma de Euler, una generalización del factorial para números complejos. Para α no enteros, se necesitan expansiones en series de potencias más generales

Estas funciones cumplen que si:



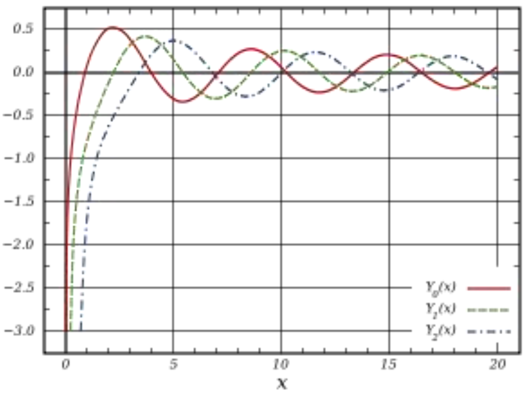
$\alpha \notin \mathbb{Z}$, entonces $J_\alpha(x)$ y $J_{-\alpha}(x)$ son linealmente independientes, y por tanto dan una solución general de la ecuación de Bessel.

$\alpha \notin \mathbb{Z}$, → $J_{-\alpha}(x)$ no está definida en x = 0.

$\alpha = n \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, por lo que las dos soluciones dejan de ser linealmente independientes. En este caso, la segunda solución linealmente independiente será una función de Bessel de segunda especie.

Funciones de Bessel, J_α(x), para órdenes enteros α = 0,1,2 nos muestras que son funciones oscilatorias

Las funciones de Bessel de 2da especie, $Y_\alpha(x)$, para órdenes α=0,1,2, son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel, Estas funciones divergen en el origen (x = 0).



Estas funciones $Y_\alpha(x)$ también se les llama *funciones de Neumann* o de Weber, y a veces se denotan por $N_\alpha(x)$. Para α; no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie $J_\alpha(x)$ mediante:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall\alpha \notin \mathbb{Z}$$

Para un orden entero n, la función es definida como:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Que resulta en forma integral: $Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta - n\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}\right] e^{-x\sinh t}dt$

Para el caso en el que tengamos α no enteros, la definición de $Y_\alpha(x)$ es redundante (como queda claro por su definición de arriba). Por otro lado, cuando α es entero, $Y_\alpha(x)$ es la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel, además, de forma similar a lo que ocurría con las funciones de primera especie, se cumple que: $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \forall n \in \mathbb{Z}$

Ambas $J_\alpha(x)$ y $Y_\alpha(x)$ son funciones holomorfas de x en el plano complejo cortado por el eje real negativo. Cuando α es un entero, no hay puntos de ramificación, y las funciones de Bessel son funciones enteras de x. Si fijamos x, entonces las funciones de Bessel son funciones enteras respecto a la variable α.

Las funciones holomorfas son el principal objeto de estudio del Análisis complejo; son funciones que se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo C y con valores en C, que además son complejo-diferenciables en cada punto.
Esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad en caso real e implica que la función es infinitamente diferenciable y que puede ser descrita mediante su serie de Taylor.

El término función analítica se usa a menudo en vez del de "función holomorfa", aunque el término de "analítico" tiene varios otros significados. Una función que sea holomorfa sobre todo el plano complejo se dice función entera. La frase "holomorfa en un punto *a*" significa no sólo diferenciable en *a*, sino diferenciable en todo un disco abierto centrado en *a*, en el plano complejo.

FUNCIONES DE BESSEL DE LA PRIMERA ESPECIE:

Sea $a_0 = \frac{1}{[2pr(p+1)]}$ en la ecuación (4) observamos: r(p+m+1)= (p+m) (p+m-1)...(p+2) (p+1) r(p+1)

La función de Bessel de la primera especie de orden p: $J^p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!r(p+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$

Si P no es un entero: $b_0 = \frac{1}{[[2^{-p}r(-p+1)]]}$ La ecuación (7) para la 2da solución linealmente independiente

$$J_{-P}(x) = \sum_{m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!r(-p+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p}$$

De la Ecuación de Bessel de orden **P**.

- Si p no es un entero la solución general será: $y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$
- Si p no es entero no negativo: $J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$
  Para las funciones de bessel de la primera especie y de orden entero
- $J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m . x^{2m}}{2^{2m}(n!)} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{.2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\ldots$
- $J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \ldots$ (18)

FUNCIÓN BESSEL DE LA SEGUNDA ESPECIE:

Una generalización puede ser:

$$Y_m(x) = 2/\pi\,(\gamma + \ln x/2) J_m(x) - 1/\pi \sum_{n=0}^{n=1} \frac{2^{2-2n}(n-m-1)!}{n!\,x^{n-2m}} - 1/\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_m + m)}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

Si n = 0 si el primer sumando de (20) de modo que se hace cero la función Bessel de la segunda especie y de orden entero $n \geq 0$. La solución general es: $Y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_m(x)$

IDENTIDADES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

Las funciones de Bessel satisfacen a un número de identidades de frecuente utilidad en especial integrales que requieran funciones de Bessel partiendo de:

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,r(p+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Cuando p sea un entero no negativo: $d/d_x \left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x)$

Para p entero no negativo: $d/d_x \left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$

Como conclusión podemos expresar la derivada de las funciones de Bessel en término de las propias funciones de Bessel y obtenemos la fórmula de recurrencia

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x) \qquad \text{(A)}$$

Expresa función de Bessel de orden superior en término de función de Bessel de orden inferior

Ejemplo: Si p = 2 en la ecuación (A) → $J_3(X) = \frac{4}{X} J_2(x) - J_1(x)$ → Con p=1 obtengo $J_2 y$

Reemplazando: $J_3(x) = \frac{4}{x}\left[\frac{2}{x}.J_1(x) - J_0(x)\right] - J_1(X)$, Finalmente: $J_3(x) = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x)$